① Rozhodněte, zda křivka

$$x^3+y^3-2xy=0$$ leží v okolí bodu [1,1]

nad (nebo pod) svojí tečnou.

Řeš.: derivujme podle x:

$$3x^2+3y^2\cdot y'-2y-2xy'=0 \qquad (*)$$

tečna: $y'(2x-3y^2)=3x^2-2y$

$$y'=\frac{3x^2-2y}{2x-3y^2} \qquad y'(1,1)=-1$$

$$y-y_0=y'(1,1)\cdot(x-x_0)$$

$$y-1=-(x-1)$$

konvexnost: derivujme (*): $6x+6y\cdot y'\cdot y'+3y^2\cdot y''-2y'-2y'-2xy''=0$

odtud $y''(3y^2-2x)=-6x-6y(y')^2+4y'$

$$y'' = \frac{4y' - 6x - 6y(y')^2}{3y^2 - 2x}$$

$y'(1,1) = -1$

$$y''(1,1) = \frac{-4 - 6 - 6\cdot(-1)^2}{3-2} = -16 < 0$$

konkávní, leží tedy $y(x)$ v $[1,1]$ pod tečnou.

(2) Rozhodnite, zda plocha daná v okolí $[1,0,1] \in E_3$ rovnicí

$$x^3+y^3+z^3-3xyz-x-y-z=0$$

leží nad nebo pod tečnou rovinou v $[1,0,1]$

Řeš: derivujme $z=z(x,y)$

tečná rovina: $z-z_0=z'_x(x-x_0)+z'_y(y-y_0)$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $3x^2+3z^2\cdot z'_x-3y(z+x\cdot z'_x)-1-z'_x=0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $3y^2+3z^2\cdot z'_y-3x(z+y\cdot z'_y)-1-z'_y=0$

Dosazením $[1,0,1]$: $3+3z'_x-1-z'_x=0 \Rightarrow z'_x(1,0,1)=-1$

$3z'_y-3(1+0)-1-z'_y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z'_y(1,0,1)=2$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}: \; 6x + 6z \cdot z'_x \cdot z'_x + 3z^2 \cdot z''_{xx} - 3y\left(z'_x + z'_x + x \cdot z''_{xx}\right)$$
$$- z''_{xx} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}: \; 6y + 6z \cdot z'_y \cdot z'_y + 3z^2 \cdot z''_{yy} - 3x\left(2z'_y + y \cdot z''_{yy}\right)$$
$$- z''_{yy} = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}: \; 6z \cdot z'_y \cdot z'_x + 3z^2 \cdot z''_{xy} - 3\left(z + x \cdot z'_x\right) - 3y\left(z'_y + x \cdot z''_{xy}\right)$$
$$- z''_{xy} = 0$$

Dosadíme $[1,0,1]$: $6 + 6\left(\underbrace{z'_x}_{=-1}\right)^2 + 3 \cdot z''_{xx} - z''_{xx} = 0$

$$2 \cdot z''_{xx} = -12 \Rightarrow \underline{\underline{z''_{xx} = -6}}$$

$$6 \cdot \left(\underbrace{z'_y}_{2}\right)^2 + 3 \cdot z''_{yy} - 3\left(2 \cdot z'_y\right) - z''_{yy} = 0$$

$$12 + 2 \cdot z''_{yy} = 0 \Rightarrow z''_{yy} = -6$$

$$-12 + 2z''_{xy} = 0$$

$$6 \cdot z'_y \cdot z'_x + 3 \cdot z''_{xy} - 3\left(1 + z'_x\right) - z''_{xy} = 0 \Rightarrow z''_{xy} = 6$$

$$H = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} \cdot DH = 0 \quad ??$$

poz. def. $\Rightarrow$ nad tečnou   není

neg. def. $\Rightarrow$ pod tečnou   chyba?

③ Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně:

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

Řeš: derivováním podle x:

$$\frac{2x+2y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot 2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\frac{y'x-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\frac{x+y\cdot y'}{x^2+y^2} = \frac{y'x-y}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x+yy' = y'x-y$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{x+y}{x-y} \qquad [x \neq y]$$

dosazením do rce:

stac. body: $\frac{x+y}{x-y} = 0 \Leftrightarrow x = -y$,

$$\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg} -1$$

$$\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}(-1)$$

$$\frac{1}{2}\ln(2x^2) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\ln 2x^2 = -\frac{\pi}{2}$$

$$2x^2 = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

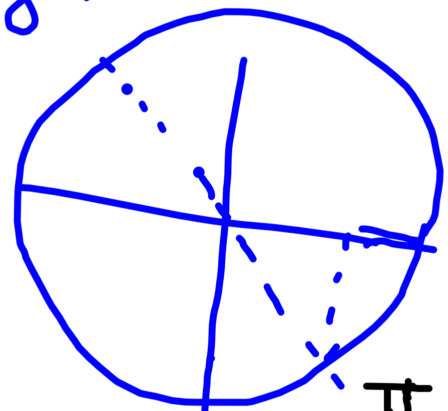
$$x^2 = \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

stac. body $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}}$ $\quad y = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$

$\operatorname{tg} x : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$

$\operatorname{arctg} -1 = -\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi$

$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi\right) = -1$



druhá derivace: derivujeme $x + yy' = y'x - y$ podle x:

$$1 + (y')^2 + y\cdot y'' = y''\cdot x + y' - y' \Rightarrow y''(x-y) = 1 + (y')^2$$

$$y'' = \frac{1+(y')^2}{x-y}$$ ve stac. b. $y'' = \frac{1}{x-y}$

Odtud pro $x = +\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi}{4}} = -y$

dostávám lok. minimum

a v $x = -\frac{1}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} = -y$ lok. maximum.

$y = \operatorname{tg} x$:

(4) Určete parametrickou rovnici tečny v $[x_0, y_0, z_0]$, $z_0 > 0$ ke křivce, jež vznikla jako průsečík kulové plochy $K: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s válcovou plochou $V: x^2 + y^2 - 2x = 0$ (Vivianiho křivka)

Řeš: Určíme normálové vektory k oběma plochám v $[x_0, y_0, z_0]$

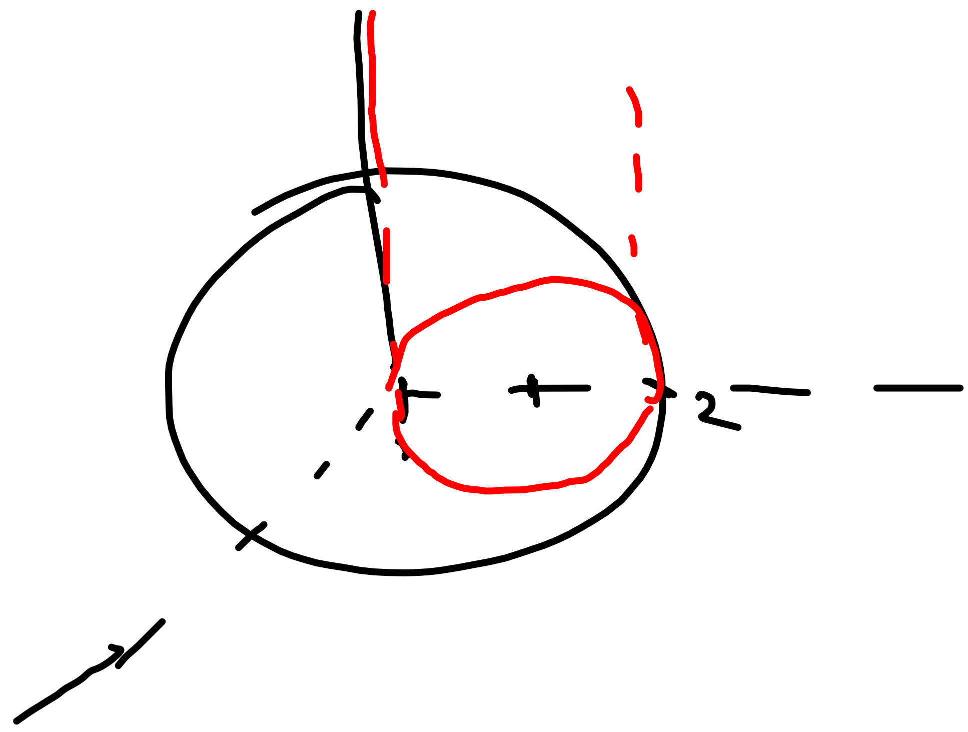
normál. v. K: $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$

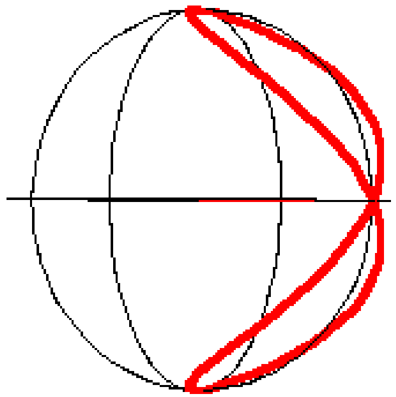
normál. v. V: $(2x_0 - 2, 2y_0, 0)$

pomocí vektorového součinu najdeme směrový vektor hledané tečny:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 2x_0-2 & 2y_0 & 0 \end{vmatrix} = e_1(-4y_0 z_0) + e_2(4x_0 z_0 - 4z_0) + e_3(4x_0 y_0 - 4x_0 y_0 + 4y_0) \Rightarrow$$

tečna: $[x_0, y_0, z_0] + \alpha \cdot 4 \cdot (-y_0 z_0, x_0 z_0 - z_0, y_0)$


1
2



Příklad 32. Výrobce uvažuje možnost produkce dvou výrobků V_1 a V_2. Pro jejich výrobu může počítat s využitím 180 kg surovin, 240 hodin práce speciálních strojů a náklady jsou přitom omezeny částkou 160 tisíc. Na základě předpokládaných tržeb byl stanoven očekávaný zisk za 1 kus výrobku V_1 7 tisíc Kč a u výrobku V_2 9 tisíc Kč. Z předběžného průzkumu zájmu o oba výrobky vyplynulo, že je lze prodat v libovolném množství.

V rámci přípravy produkce byla stanovena náročnost obou výrobků z hlediska spotřeby uvažovaných výrobních zdrojů na 1 kus:

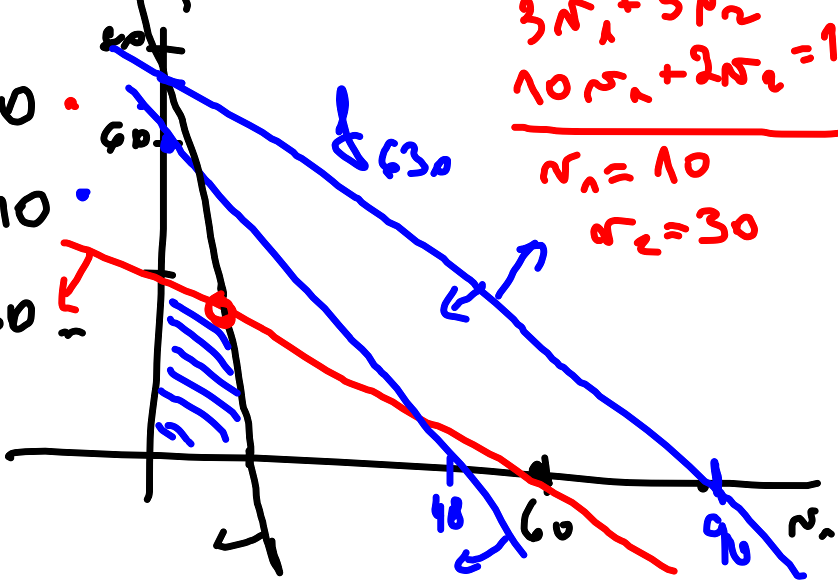
Výrobek	spotřeba surovin [kg]	spotřeba času [h]	náklady [tis. Kč]
V_1	3	5	10
V_2	5	4	2

Vzhledem k uvedeným skutečnostem se výrobce zajímá o to, jak by měla vypadat struktura výroby, aby mu přinesla co největší zisk.

$\max f = 7v_1 + 9v_2$ za podmínek

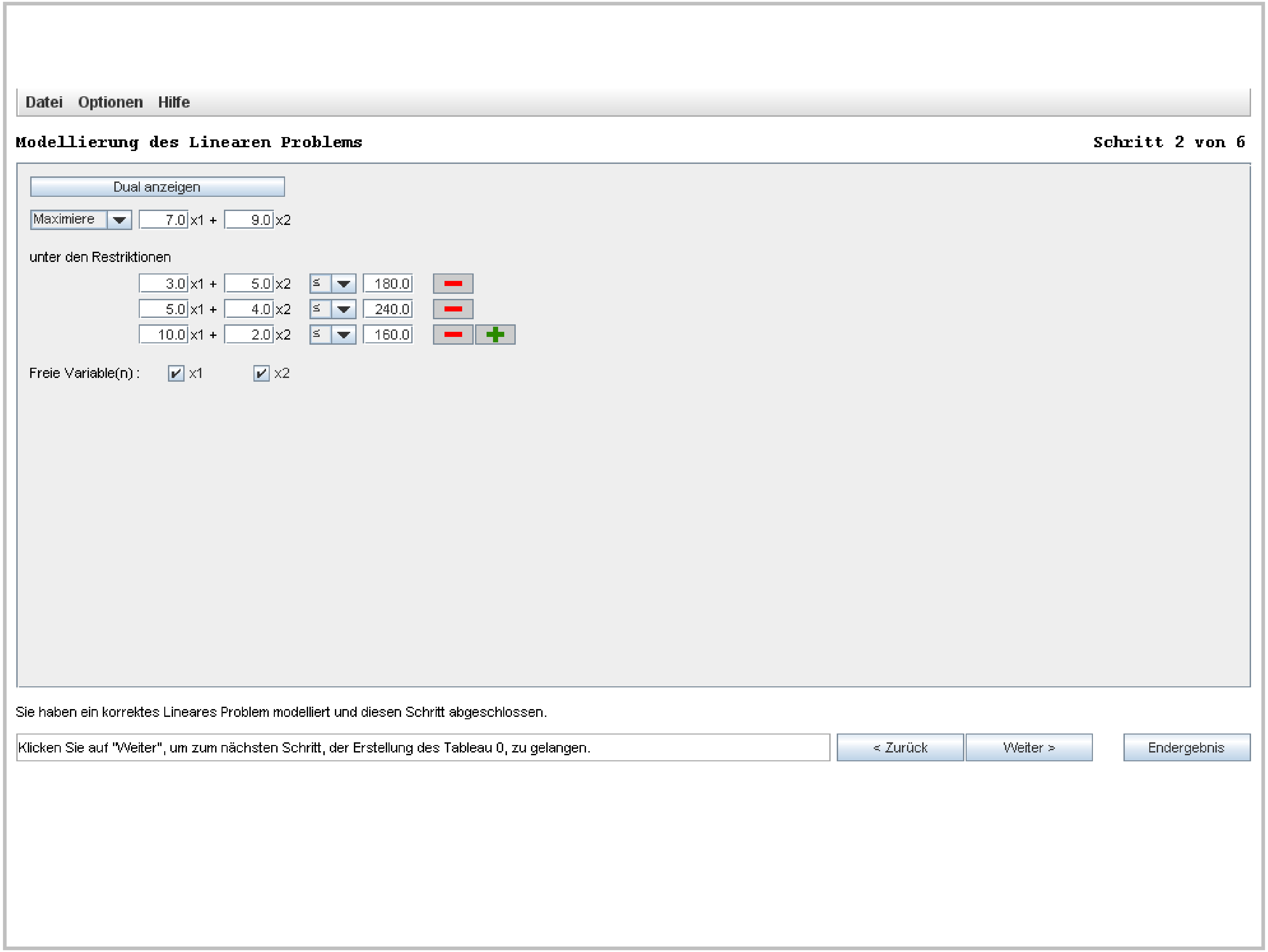
$$3v_1 + 5v_2 \leq 180$$
$$5v_1 + 4v_2 \leq 240$$
$$10v_1 + 2v_2 \leq 160$$

$v_1 \geq 0 \quad v_2 \geq 0$



$3v_1 + 5v_2 = 180$
$10v_1 + 2v_2 = 160$

$v_1 = 10$
$v_2 = 30$


Datei Optionen Hilfe
Modellierung des Linearen Problems
Schritt 2 von 6
Dual anzeigen
Maximiere 7.0 x1 + 9.0 x2
unter den Restriktionen
3.0 x1 + 5.0 x2 ≤ 180.0
5.0 x1 + 4.0 x2 ≤ 240.0
10.0 x1 + 2.0 x2 ≤ 160.0
Freie Variable(n) : x1 x2
Sie haben ein korrektes Lineares Problem modelliert und diesen Schritt abgeschlossen.
Klicken Sie auf "Weiter", um zum nächsten Schritt, der Erstellung des Tableau 0, zu gelangen.
< Zurück
Weiter >
Endergebnis

Datei Optionen Hilfe

Erstellen des Tableau 0 **Schritt 3 von**

$$\text{MAX } z = 7.0x1(f) + 9.0x2(f) \;!$$
$$3.0x1(f) + 5.0x2(f) \leq 180.0$$
$$5.0x1(f) + 4.0x2(f) \leq 240.0$$
$$10.0x1(f) + 2.0x2(f) \leq 160.0$$

Tab.0

x1(f)	x2(f)	y1	y2	y3	RS
-7.0	-9.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	5.0	1.0	0.0	0.0	180.0
5.0	4.0	0.0	1.0	0.0	240.0
10.0	2.0	0.0	0.0	1.0	160.0

Die Werte sind alle korrekt! Sie haben das Tableau 0 erstellt und diesen Schritt abgeschlossen.

Klicken Sie auf "Weiter", um zum nächsten Schritt, der Berechnung einer zulässigen Ausgangslösung, zu gelangen

< Zurück | Weiter > | Endergebnis

Datei Optionen Hilfe

Erstellen einer zulässigen Ausgangslösung **Schritt 4 von (**

Tab.0

x1(f)	x2(f)	y1	y2	y3	RS
-7.0	-9.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3.0	5.0	1.0	0.0	0.0	180.0
5.0	4.0	0.0	1.0	0.0	240.0
10.0	2.0	0.0	0.0	1.0	160.0

Schrittweise berechnen:

Tab.1

x1(f)	x2(f)	y1	y2	y3	RS

Das gewählte Pivot-Element (r=1 s=2) ist zulässig! Berechnen Sie jetzt diese Iteration, indem Sie Algorithmus 5 auf die obere Tabelle anwenden. Tragen Sie die berechneten Werte unten ein.

Berechnen Sie eine korrekte Ausgangslösung, um zum nächsten Schritt, der Optimierung der Ausgangslösung, zu gelangen

< Zurück Weiter > Endergebnis

Datei Optionen Hilfe

Erstellen einer zulässigen Ausgangslösung **Schritt 4 von**

Tab. 1

x1(f)	x2	y1	y2	y3	RS
-1.6	0.0	1.8	0.0	0.0	324.0
0.6	1.0	0.2	0.0	0.0	36.0
2.6	0.0	-0.8	1.0	0.0	96.0
8.8	0.0	-0.4	0.0	1.0	88.0

Schrittweise berechnen:

Tab. 2

x1	x2	y1	y2	y3	RS
0.0	0.0	1.7273	0.0	0.1818	340.0
0.0	1.0	0.2273	0.0	-0.0682	30.0
0.0	0.0	-0.6818	1.0	-0.2955	70.0
1.0	0.0	-0.0455	0.0	0.1136	10.0

Die Werte sind alle korrekt! Sie haben eine zulässige Ausgangslösung gefunden und diesen Schritt abgeschlossen.

Klicken Sie auf "Weiter", um zum nächsten Schritt, der Optimierung der Ausgangslösung, zu gelangen

< Zurück Weiter > Endergebnis

Datei Optionen Hilfe

Optimierung der Ausgangslösung

Schritt 5 von

Tab.2

x1	x2	y1	y2	y3	RS
0.0	0.0	1.7273	0.0	0.1818	340.0
0.0	1.0	0.2273	0.0	-0.0682	30.0
0.0	0.0	-0.6818	1.0	-0.2955	70.0
1.0	0.0	-0.0455	0.0	0.1136	10.0

$x_1 = 10$

$x_2 = 30$

$y_2 = 70$, ostatní rovny 0.

v 1. řádku není nic záporného

$\Rightarrow$ máme optimum

Tab.2 ist schon eine optimale Lösung. Klicken Sie bitte auf Weiter.

Klicken Sie auf "Weiter", um zum nächsten Schritt, der Auswertung des Ergebnisses, zu gelangen

< Zurück | Weiter > | Endergebnis

Done

Datei Optionen Hilfe

Auswertung des Ergebnisses **Schritt 6 von 6**

Lineares Problem:

MAX z = 7.0x1(f) + 9.0x2(f) !
3.0x1(f) +5.0x2(f) ≤ 180.0
5.0x1(f) +4.0x2(f) ≤ 240.0
10.0x1(f) +2.0x2(f) ≤ 160.0

Lösung des Simplex:

Tab.2

x1	x2	y1	y2	y3	RS
0.0	0.0	1.7273	0.0	0.1818	340.0
0.0	1.0	0.2273	0.0	-0.0682	30.0
0.0	0.0	-0.6818	1.0	-0.2955	70.0
1.0	0.0	-0.0455	0.0	0.1136	10.0

Zielfunktionwert: 340.0

Lösung der Parameter:

x1 = 10.0
x2 = 30.0

Schattenpreise:

y1 = 1.7273 (Oportunitätskosten)
y2 = 70.0 (Schattenpreis)
y3 = 0.1818 (Oportunitätskosten)

Weitere Analysen:

Detail-Lösung anzeigen | Sensitivität bzgl. Zielfunktionskoeffizienten | Sensitivität bzgl. rechter Seite

Für weitere Analysen des Simplex Problems, klicken Sie bitte auf die unteren Buttons (Detaillösung, Sensitivität von c, Sensitivität von b)

Sie befinden sich im letzten Schritt des Assistenten

< Zurück | Weiter > | Endergebnis