PB165 – Grafy a sítě

Stromy

24. září 2007

Obsah přednášky

Kružnice a cyklus v grafu

Definice

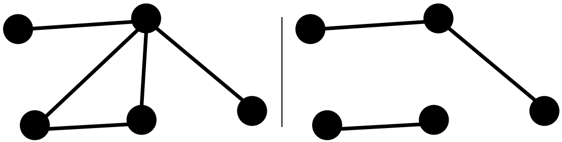
Kružnice (uzavřená cesta) v grafu je netriviální neorientovaná cesta, jež začíná i končí ve stejném vrcholu. Cyklus je orientovaná (z orientovaných hran složená) kružnice respektující orientaci těchto hran.

- Cyklus je tedy vždy kružnicí, ale každá kružnice nemusí být vždy cyklem.
- Krom zákazu opakování vrcholů (vyjma shodnosti prvního a posledního) je důležitý i zákaz opakování hran – jinak by kružnicí mohl být sled u, e, v, e, u.
- Zákaz opakování vrcholů znemožňuje využít násobných hran multigrafu s výjimkou kružnice na 2 vrcholech.
- Samostatný vrchol, který je cestou, za cyklus nepovažujeme.
- Graf, který obsahuje cyklus, se nazývá *cyklický*. Pokud graf cyklus neobsahuje, nazýváme jej *acyklický*.

Kružnice v grafu – příklady

- V Internetu existuje mnoho redundantních linek – graf jeho fyzického propojení je cyklický.
- Lokální ethernetové sítě mají acyklickou topologii.
- Sítě založené na technologii Token Ring mají logickou kruhovou topologii.
- Sítě SONET podporují zapojení do kruhu.

Obrázek: Levý graf je cyklický, pravý acyklický



Cyklické hrany

Definice

Pokud je hrana v grafu součástí nějakého cyklu, nazývá se cyklická.

Věta

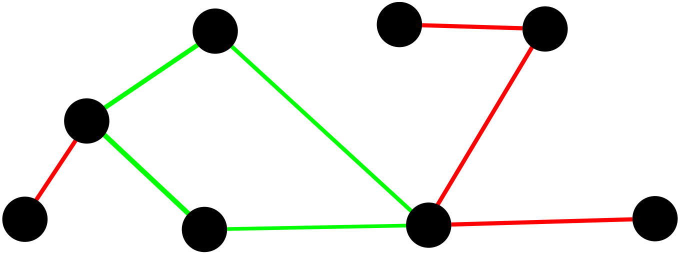
Odstraníme-li ze souvislého grafu G hranu e, vzniklý graf $G - e$ bude souvislý právě tehdy když e je cyklická.

Důkaz.

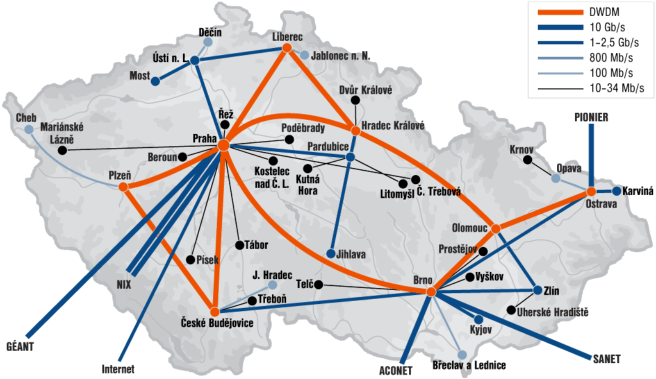
Před odstraněním hrany je (z definice) každý vrchol grafu G dosažitelný z každého jiného vrcholu. Nechť hrana e spojuje vrcholy u, v. Po jejím odstranění je každý vrchol grafu G dosažitelný z vrcholu u nebo v (tedy může i z o obou). Graf se tak rozpadne nejvýše na 2 souvislé podgrafy – komponenty souvislosti. Právě tehdy, když existuje cyklus, jehož je e součástí, existuje cesta mezi u a v, která neprochází hranou e. Graf $G - e$ je souvislý právě tehdy, když existuje cesta mezi u a v neobsahující hranu e. □

Cyklické hrany – příklady

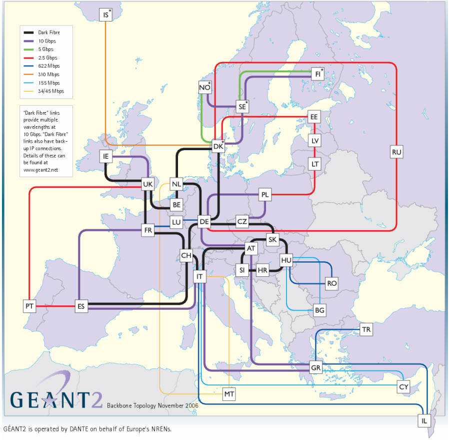
Obrázek: Cyklické hrany jsou označeny zeleně, ostatní, které způsobí rozpad grafu, červeně.



Topologie sítě CESNET



Topologie sítě GÉANT



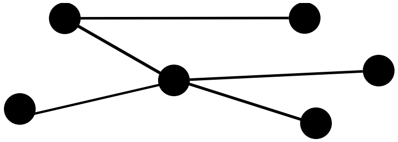
Stromy

Definice

Les je graf, který neobsahuje kružnice. Strom je graf, který neobsahuje kružnice a je souvislý.

- Strom je tedy souvislý les.
- Lokální ethernetová síť má topografii stromu, protože je souvislá a acyklická.

Obrázek: Jednoduchý příklad stromu



Vlastnosti stromů

Následující věta má význam zejména pro důkazy vět dalších:

Věta

Každý strom s alespoň 1 hranou obsahuje nejméně 2 vrcholy stupně 1.

Důkaz.

Jelikož cest v konečném grafu je konečně mnoho, existuje mezi nimi vždy nejdelší cesta – tedy taková, která prochází nejvíce hranami. Pokud některý z jejích koncových vrcholů má stupeň vyšší než 1, vede z něj hrana, která není součástí této cesty. Pokud tato hrana vede do vrcholu, který je součástí cesty, existuje v grafu cyklus a ten tedy není stromem. Vede-li tato hrana do vrcholu, který součástí cesty není, dá se tato cesta prodloužit a není tudíž nejdelší. V obou případech tak docházíme ke sporu. □

Počet hran stromů

Důsledkem předchozí věty je, že každý graf, jehož všechny vrcholy jsou stupně alespoň 2, obsahuje kružnici.

Věta

Strom s n vrcholy obsahuje právě $n-1$ hran.

Důkaz.

Indukcí: triviální strom s 1 vrcholem neobsahuje žádnou hranu. Předpokládáme, že tvrzení platí pro strom s k vrcholy. Uvažujme strom G s $k+1$ vrcholy a jeho vrchol v stupně 1. Odebráním vrcholu v a jemu incidentní hrany vznikne graf $G-v$. Jelikož v je stupně 1, zůstává graf $G-v$ souvislý. Odebrání vrcholu z grafu do něj nemůže nijak vnést cyklus. Graf $G-v$ je tedy souvislý a acyklický, je tedy stromem s k vrcholy. Odebrání v z G odstranilo právě 1 hranu, G má tedy k hran. □

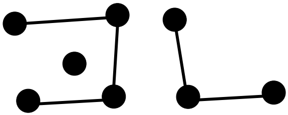
Počet hran lesu

Žádná hrana ve stromě není cyklická. Odstranění libovolné hrany tedy způsobí rozpad na 2 komponenty souvislosti. Jelikož z každého souvislého grafu lze odebírat hrany dokud není stromem, je $k-1$ zároveň dolní hranicí pro počet hran libovolného souvislého grafu s k vrcholy.
Větu dokázanou na předchozí straně lze aplikovat i na lesy. Jeho komponenty souvislosti jsou stromy. Pro každou komponentu je třeba od počtu jejích vrcholů odečíst 1 hranu.

Věta

Les o n vrcholech a k komponentách má $n-k$ hran.

Obrázek: Les, jež se skládá z 8 vrcholů, 3 komponent a 5 hran.



Další vlastnosti stromů

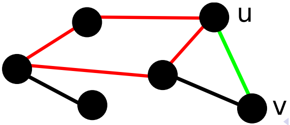
Věta

Mezi každými 2 vrcholy ve stromu vede právě jedna cesta.

Důkaz.

Uvažujme, že mezi některými 2 vrcholy vedou 2 cesty. Potom je lze rozdělit na 3 části: společný počátek, rozdílná část a společný konec. Nechť u je první vrchol na těchto cestách, kterým se cesty rozdělují, a v je první vrchol, kterým se opětovně spojují. Potom rozdílné úseky cest mezi vrcholy u a v tvoří kružnici a graf tedy není stromem, což je spor. □

Obrázek: Zeleně je vyznačena přidávaná hrana, červeně existující cyklus v grafu.



Další vlastnosti stromů

Důsledkem jedinečnosti cest mezi vrcholy stromu je následující věta:

Věta

Přidáním libovolné hrany do stromu vznikne právě jedna kružnice.

Důkaz.

Nechť přidaná hrana e spojuje vrcholy u, v. Mezi nimi již vede právě jedna cesta. Přidáním hrany e vznikne cesta druhá, tedy i kružnice. Zbývá dokázat, že vznikne nejvýše jedna kružnice: každá vzniknuvší kružnice bude procházat hranou e. Pokud by jí procházely 2 kružnice, musely by ještě před přidáním hrany e existovat 2 různé cesty mezi u a v, tedy i kružnice, a graf by tak nebyl stromem. □

Stromy a jejich vlastnosti – cvičení

1. Nakreslete 10vrcholový les složený z 3 komponent a obsahující právě 8 hran. Pokud to není možné, zdůvodněte proč.
2. Dokažte, že mají-li dvě kružnice v grafu společnou hranu, existuje v tomto grafu kružnice tuto hranu neobsahující.
3. Dokažte, že přidáním libovolné hrany do souvislého grafu vznikne alespoň jedna kružnice.
4. Kolik vznikne kružnic, přidáme-li ke stromu dvě hrany?
5. Dokažte, že souvislý graf o n vrcholech a n hranách obsahuje právě jeden cyklus.

Kořenový strom

Definice

Strom, jehož hrany jsou orientované, se nazývá také orientovaný.

Orientovaný strom, jenž má určen význačný vrchol (kořen) r, a v němž existuje orientovaná cesta z r do všech ostatních vrcholů, se nayvá kořenový strom.

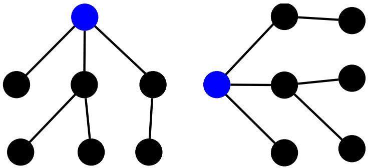
- Při kreslení kořenových grafů se obvykle vynechávají šipky definující orientaci hran, předpokládá se, že směřují „od kořene“.
- Vzhledem k absenci cyklů je interpretace jednoznačná.

Kořenový strom – příklady

Kde v sítích najdeme kořenové stromy?

- Směrování – cíl paketu je kořenem stromu cest vedoucích od ostatních vrcholů k němu.
- DNS – hierarchická struktura serverů obsluhujících domény různých úrovní.
- Multicast – zdroj je kořenem, cesty k příjemcům tvoří strom.

Obrázek: Dvě obvyklá kreslení kořenového stromu. Kořen je vyznačen modře.



Vztah orientovaných a kořenových stromů

Každý kořenový strom je orientovaný. Jaké jsou podmínky pro to, aby orientovaný strom byl zároveň kořenovým?

Věta

Orientovaný strom je kořenový právě tehdy, když právě jeden z jeho vrcholů má vstupní stupeň 0 a všechny ostatní vrcholy 1.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť r je kořen stromu a jeho vstupní stupeň je vyšší než 0. Potom do něj vede hrana z některého z ostatních vrcholů stromu. Do toho ovšem vede cesta z kořene, v grafu je tedy cyklus, čímž docházíme ke sporu. Pokud do některého z ostatních vrcholů (označme jej u) vedou více než 2 hrany (z různých vrcholů v, w), potom do něj vedou 2 cesty z kořene, a to skrze cesty do v, w. Tím opět docházíme ke sporu. $\square$

Vztah orientovaných a kořenových stromů – pokračování důkazu

Důkaz.

$\Leftarrow$ Označme r vrchol, jehož vstupní stupeň je 0. Poté pro každý jiný vrchol w platí následující:

- Vstupní stupeň w je roven 1. Existuje tedy právě jeden vrchol, u_1, z nějž vede do w hrana. Není-li u_1 totožný s r, vede do něj opět hrana z právě jednoho vrcholu, u_2. Takto tvořená řada vrcholů, z nichž vede cesta do w, je nutně konečná, neboť strom je acyklický, tudíž se v ní žádný z vrcholů nemůže opakovat. Posledním vrcholem v této posloupnosti musí být r.

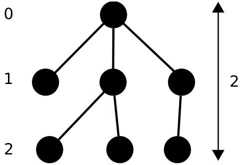
Do každého vrcholu stromu tedy vede orientovaná cesta z vrcholu r a ten je tudíž kořenem stromu. $\square$

Hloubka vrcholů a výška stromů

Definice

Vzdálenost (počet hran na cestě) vrcholu od kořene stromu se nazývá hloubka či úroveň vrcholu.

- Hloubka kořene je rovna 0.
- Je zvykem kreslit vrcholy jedné úrovně ve stejné výšce.



Definice

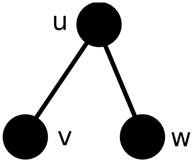
Výškou kořenového stromu označujeme nejvyšší z hloubek všech jeho vrcholů.

Rodiče a sourozenci v kořenových stromech

Definice

Vede-li v kořenovém stromu hrana z vrcholu u do v, nazývá se u rodičem (otcem) v a v synem.
Vrcholy mající společného rodiče nazýváme sourozenci.

Obrázek: Vrchol u je rodičem obou vrcholů v, w, které jsou sourozenci.



Definice

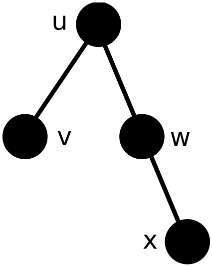
Vrchol u je předkem vrcholu v, pokud leží na cestě z r do v. v se v takovém případě nazývá následníkem vrcholu u

Listy a vnitřní vrcholy stromu

Definice

Vrchol, jenž nemá žádné potomky, nazýváme list stromu. Ostatní vrcholy se označují jako vnitřní.

Obrázek: Vrcholy v, w, x jsou následníky vrcholu u. Vrchol w má jediného následníka x. Předky x jsou u, w.

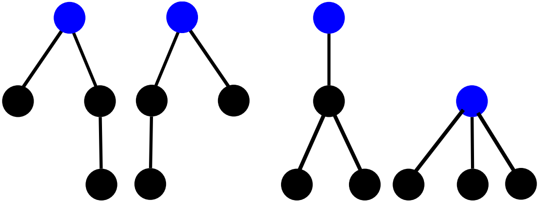


Isomorfismus kořenových stromů

Definice

Kořenové stromy považujeme za isomorfní, pokud mezi nimi existuje isomorfismus který zobrazí kořen stromu na kořen.

Obrázek: Dva levé grafy na obrázku jsou isomorfní kořenové stromy. Dva pravé grafy jsou isomorfní stromy, ale ne isomorfní kořenové stromy.



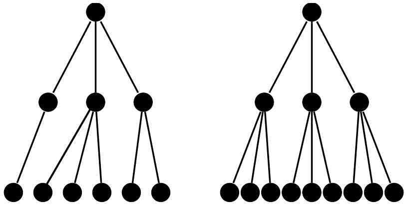
Existuje tedy více různých tříd kořenových stromů s ohledem na isomorfismus než tříd stromů se stejným počtem vrcholů.

n-ární, úplné stromy

Definice

Kořenový strom, jehož každý vrchol má nejvýše n potomků, se nazývá n-ární.
n-ární strom, jehož vnitřní vrcholy mají právě n potomků a všechny listy jsou stejné hloubky, se nazývá úplný n-ární.

Obrázek: Levý strom je 3-ární (ternární), pravý je úplný ternární.



Uspořádané stromy

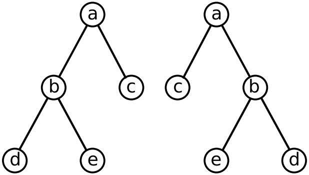
V některých případech může být výhodné potomky každého vrcholu jednoznačně pojmenovat a seřadit:

Definice

Uspořádaný strom je kořenový strom s daným pořadím potomků každého vrcholu.

Při kreslení uspořádaného grafu se dané pořadí vrcholů dodržuje ve směru zleva doprava.

Obrázek: Isomorfní kořenové stromy s různým uspořádáním.



Počet vrcholů úrovně stromu

Pro každou úroveň n-árního stromu je dán limit počtu vrcholů v této úrovni:

Věta

V m-té úrovni n-árního stromu se nachází nejvýše n^m vrcholů.

Důkaz.

Indukcí:
Pro kořen platí triviálně: $n^0 = 1$.
Nechť je v úrovni k právě n^k vrcholů. Každý z nich může mít nejvýše n potomků. Úroveň $k+1$ tedy obsahuje nejvýše $n * n^k = n^{k+1}$ vrcholů. □

Kořenové stromy – cvičení

1. Nakreslete, nebo zdůvodněte proč to není možné:
   1. Binární strom výšky 5 s právě 12 vrcholy a právě 5 listy.
   2. Binární strom výšky 3 s právě 12 vrcholy.
2. Kolik existuje různých neúplných ternárních stromů výšky 3 takových, že každý vnitřní vrchol má právě 3 potomky.

Binární stromy

Speciálním (a prakticky nejpoužívanějším) n-árním stromem je strom *binární*.

Definice

Uspořádaný 2-ární strom se nazývá binární. Potomci každého vrcholu jsou označováni jako levý a pravý.

- Každý kořenový strom lze převést na binární.
- Vnitřní algoritmy směrovacích zařízení mohou být založeny na binárních stromech.

Podstromy binárních stromů

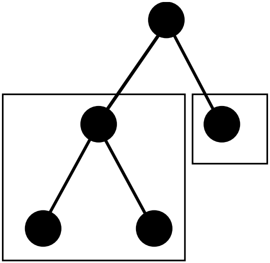
Definice

Indukovaný podgraf binárního stromu G, tvořený jedním potomkem vrcholu v a všemi jeho následníky, se nazývá podstromem vrcholu v a stromu G.

- Podstrom binárního stromu je také binárním stromem.
- Každý vrchol má *levý* a *pravý* podstrom, přičemž jeho levý, resp. pravý, potomek je kořenem tohoto podstromu.
- Pravý a levý podstrom binárního stromu o výšce h mají výšku nejvýše $h-1$, přičemž nejméně jeden z nich má výšku právě $h-1$.

Podstromy binárních stromů – příklad

Obrázek: Levý a pravý podstrom kořene stromu.



Počet vrcholů úplného binárního stromu

Věta

Úplný binární strom výšky h má právě $2^{h+1} - 1$ vrcholů.

Důkaz.

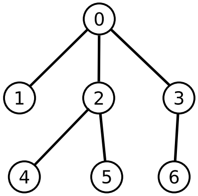
Indukcí:
Pro binární strom výšky 0 platí zřejmě.
Nechť strom výšky k má právě $2^{k+1} - 1$ vrcholů. jak bylo dokázáno dříve, $(k+1)$. vrstva obsahuje 2^{k+1} vrcholů. Strom výšky $k+1$ tedy má

$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 * 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

vrcholů. □

Reprezentace kořenových stromů

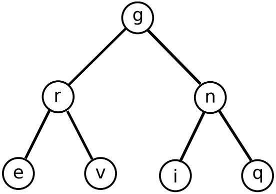
- Kořenové stromy lze jednoznačně reprentovat *polem rodičů* – tedy polem, ve kterém je pro každý vrchol uložen pouze název jeho rodiče.
- Taková reprezentace je velmi prostorově výhodná (lineární prostorová složitost).



Pole rodičů má tvar: – 0 0 0 2 2 3.

Reprezentace úplných ohodnocených stromů

- Obdobně výhodně lze reprezentovat úplné ohodnocené stromy.
- Každý vrchol může mít v lineárním poli pevně danou pozici.
- Na této pozici je v poli uloženo ohodnocení vrcholu.
- Konkrétně pro binární strom:
    - Kořen je uložen na pozici 0.
    - Potomci vrcholu k jsou uloženi na pozicích $2 * k + 1, 2 * k + 2$.



Pole reprezentující tento binární graf obsahuje hodnoty `g r n e v i q`.

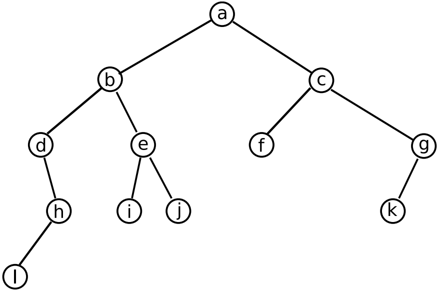
Průchod binárním stromem

V některých případech (např. synchronizace distribuovaných algoritmů a výpočtů) je potřebné projít všemi vrcholy grafu a vykonat nějakou akci. Průchod binárním stromem je možné provést 2 základními způsoby:

1. Průchod po úrovních
2. Průchod po podstromech

Průchod binárním stromem po úrovních

```
Vlož kořen do fronty.
Dokud je fronta neprázdná:
  Odstraň její první vrchol a proveď akci.
  Vlož do fronty jeho potomky v daném pořadí.
```



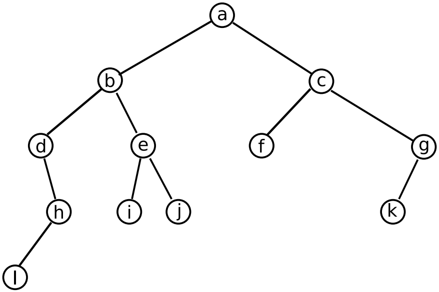
Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$.

Průchod binárním stromem po podstromech

```
Proveď akci v kořenu stromu.
Spusť algoritmus průchodu v levém podstromu.
Spusť algoritmus průchodu v pravém podstromu.
```

- Tato verze algoritmu je rekurzivní. Průchod je možné implementovat iterativně bez rekurzivních volání za použití zásobníku.
- Akci lze také provádět po průchodu levým či oběma stromy.

Průchod po podstromech – příklad



Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, d, h, l, e, i, j, c, f, g, k$.

Cvičení – reprezentace kořenových stromů

- Nakreslete všechny binární stromy výšky 2 a rozdělte je do tříd podle isomorfismu.
- Nakreslete kořenový strom podle zadaného pole rodičů:
  `- 0 1 1 2 2 3 4 4`