

Příklady o relacích

Zkoušejte hledat řešení (důkazy) pro následující příklady.

Mnoho zdaru!

Příklad 2.1. Na množině všech přirozených čísel od 0 do 1000 definujeme binární relaci R následovně: $(a, b) \in R$ právě když platí

- a) $-1 \leq a^2 - b^2 \leq 4$,
- b) $0 \leq a - b \leq 1$ nebo číslo a je trojnásobkem čísla b ,
- c) $0 \leq a - b \leq 1$ nebo číslo a je polovinou čísla b .

Odpovězte, jaké vlastnosti relace R má: je reflexivní, symetrická, antisymetrická, tranzitivní? Pokud některou z těchto vlastností relace R nemá, napište konkrétními čísly protipříklad.

Příklad 2.2. Mějme relaci soudělnosti nad přirozenými čísly, kde dvě čísla x, y jsou v relaci pokud mají společného dělitele většího než 1. Které z vlastností z Definice tato relace má?

Příklad 2.3. Nakreslete si částečné uspořádání dělitelností čísel $1, \dots, 12$ Hasseovým diagramem.

- a) Jaký je v něm nejdelší řetězec?
- b) Je v něm nejmenší či největší prvek?
- c) Kolik je tam maximálních prvků?

Příklad 2.4. Na systémy všech 5-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \dots, 12\}$ definujeme ekvivalenci následovně: Dvě množiny jsou ekvivalentní, pokud mají stejné nejmenší číslo. Kolik tříd ekvivalence v příslušném rozkladu získáme? Jak velká je největší třída?

Příklad 2.5. Na množině všech slov-řetězců nad běžnou abecedou definujeme relaci následovně: Slovo x je v relaci se slovem y pokud je y obsaženo jako podřetězec v x . O jaký známý typ relace se jedná? Zdůvodněte.

Příklad 2.6. Na množině všech slov-řetězců nad běžnou abecedou definujeme relaci následovně: Slovo x je v relaci se slovem y pokud lze x získat z y jen přeházením písmen. O jaký známý typ relace se jedná? Zdůvodněte.

Příklad 2.7. Mezi všemi studenty na přednášce UInf definujeme následující binární relaci: Každý student je v relaci sám se sebou, tj. je

to reflexivní relace. Každý student A je v relaci s jiným studentem B , právě když B sedí

- a) ve stejné řadě nalevo od A ,
- b) ve stejné řadě jako A nebo v řadě hned za A ,
- c) v poslední řadě (nezáleží, kde sedí A),
- d) v některé řadě před A .

Jaké vlastnosti má tato relace (jako symetrická, antisymetrická, tranzitivní)? Jedná se třeba o částečné uspořádání nebo o ekvivalenci? Vaši odpověď dobře zdůvodněte.