

IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

Sada 10 — Řešení

Upozornění

Vzorová řešení dostáváte k dispozici, abyste mohli zkontrolovat správnost svých řešení. Můžete je použít i jako návody k řešení jednotlivých příkladů tak, že je budete číst po částech a budete se snažit další krok provést vždy sami. Příklady ztratí veškerý svůj smysl, pokud se je budete učit jako básničku. Snažte se nad nimi přemýšlet a vyřešit je sami, než se podíváte do vzorových řešení.

Téma

Induktivní definice. Výpočet programu v deklarativním jazyce, výpočetní krok. Dokazování vlastností programů.

Příklad 1.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici $g(x, y) = \text{if } y \text{ then } x * g(x, y - 1) \text{ else } 1$.

a) Dokažte, že $g(2, 3) \mapsto^* 8$.

b) Dokažte, že pro každé $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv m^n$.

Řešení

a) Při výpočtu se budeme striktně držet definice kroku výpočtu.

```
g(2, 3)
↳ if 3 then 2 * g(2, 3 - 1) else 1
↳ 2 * g(2, 3 - 1)
↳ 2 * g(2, 2)
↳ 2 * if 2 then 2 * g(2, 2 - 1) else 1
↳ 2 * (2 * g(2, 2 - 1))
↳ 2 * (2 * g(2, 1))
↳ 2 * (2 * if 1 then 2 * g(2, 1 - 1) else 1)
↳ 2 * (2 * (2 * g(2, 1 - 1)))
↳ 2 * (2 * (2 * g(2, 0)))
↳ 2 * (2 * (2 * if 0 then 2 * g(2, 0 - 1) else 1))
↳ 2 * (2 * (2 * 1))
↳ 2 * (2 * 2)
↳ 2 * 4
↳ 8
```

b) Protože se první argument v rovnici nemění, použijeme k důkazu techniku „fixace parametru“. Buď $m \in \mathbb{N}_0$ libovolné ale pro další úvahy pevné. Indukcí vzhledem k n dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv m^n$.

Základní krok: $n = 0$. Pak

```
g(m, 0)
↳ if 0 then m * g(m, 0 - 1) else 1
↳ 1
```

Indukční krok. Nechť $\mathbf{k} \equiv n + 1$. Platí

$$\begin{aligned} g(\mathbf{m}, \mathbf{k}) & \mapsto \mathbf{if} \ \mathbf{k} \ \mathbf{then} \ \mathbf{m} * g(\mathbf{m}, \mathbf{k} - 1) \ \mathbf{else} \ \mathbf{1} \\ & \mapsto \mathbf{m} * g(\mathbf{m}, \mathbf{k} - 1) \\ & \mapsto \mathbf{m} * g(\mathbf{m}, \mathbf{u}) \end{aligned}$$

kde $\mathbf{u} \equiv n$. Podle I.P. platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{u}) \mapsto^* \mathbf{v}$, kde $\mathbf{v} \equiv m^n$. Proto

$$\begin{aligned} \mathbf{m} * g(\mathbf{m}, \mathbf{u}) & \mapsto^* \mathbf{m} * \mathbf{v} \\ & \mapsto \mathbf{w} \end{aligned}$$

kde $\mathbf{w} \equiv m * m^n = m^{n+1}$.

Příklad 2.

Uvažme deklaraci obsahující rovnici

$$g(x, y) = \mathbf{if} \ x \ \mathbf{then} \ (\mathbf{if} \ y \ \mathbf{then} \ (\mathbf{2} + g(x, y - 1)) + g(x - 1, y) \ \mathbf{else} \ x) \ \mathbf{else} \ y$$

Dokažte, že pro každá $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv z \geq m + n$.

Řešení

Protože se v dokazované vlastnosti vyskytuje součet argumentů, může být výhodné vést indukci také k součtu argumentů. Indukcí vzhledem k $i \in \mathbb{N}_0$ dokážeme následující tvrzení: Jestliže $i = m + n$ kde $m, n \in \mathbb{N}_0$, pak $g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{z}$, kde $\mathbf{m} \equiv m$, $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{z} \equiv z \geq m + n$.

Základní krok: $i = 0$. Pak $m = n = 0$ a platí

$$\begin{aligned} g(\mathbf{0}, \mathbf{0}) & \mapsto \mathbf{if} \ \mathbf{0} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{if} \ \mathbf{0} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{2} + g(\mathbf{0}, \mathbf{0} - 1)) + g(\mathbf{0} - 1, \mathbf{0}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{0}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{0} \\ & \mapsto \mathbf{0} \end{aligned}$$

Jelikož $0 \geq 0 + 0$, tvrzení platí.

Indukční krok. Nechť $i + 1 = m + n$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$. Musíme rozlišit tři možnosti.

Jestliže $m = 0$, pak

$$\begin{aligned} g(\mathbf{0}, \mathbf{n}) & \mapsto \mathbf{if} \ \mathbf{0} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{if} \ \mathbf{n} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{2} + g(\mathbf{0}, \mathbf{n} - 1)) + g(\mathbf{0} - 1, \mathbf{n}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{0}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{0} \\ & \mapsto \mathbf{n} \end{aligned}$$

a jelikož $n \geq 0 + n$, tvrzení platí.

Jestliže $m > 0$ a $n = 0$, pak

$$\begin{aligned} g(\mathbf{m}, \mathbf{0}) & \mapsto \mathbf{if} \ \mathbf{m} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{if} \ \mathbf{0} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{0} - 1)) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{0}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{m}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{0} \\ & \mapsto \mathbf{if} \ \mathbf{0} \ \mathbf{then} \ (\mathbf{2} + g(\mathbf{m}, \mathbf{0} - 1)) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{0}) \ \mathbf{else} \ \mathbf{m} \\ & \mapsto \mathbf{m} \end{aligned}$$

a jelikož $m \geq m + 0$, tvrzení platí.

Jestliže $m > 0$ a $n > 0$, pak

$$\begin{aligned}
 &g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto \mathbf{if\ m\ then\ (if\ n\ then\ (2 + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - 1)) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n})\ else\ m)\ else\ n} \\
 &\mapsto \mathbf{if\ n\ then\ (2 + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - 1)) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n})\ else\ m} \\
 &\mapsto (2 + g(\mathbf{m}, \mathbf{n} - 1)) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto (2 + g(\mathbf{m}, \mathbf{u})) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n})
 \end{aligned}$$

kde $\mathbf{u} \equiv n - 1$.

Podle I.P. platí $g(\mathbf{m}, \mathbf{u}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv p \geq m + n - 1$. Proto

$$\begin{aligned}
 &(2 + g(\mathbf{m}, \mathbf{u})) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto^* (2 + \mathbf{p}) + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto \mathbf{r} + g(\mathbf{m} - 1, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto \mathbf{r} + g(\mathbf{v}, \mathbf{n})
 \end{aligned}$$

kde $\mathbf{r} \equiv r = 2 + p$ a $\mathbf{v} \equiv m - 1$. Jelikož $p \geq m + n - 1$, platí $r \geq m + n + 1$.

Podle I.P. dále $g(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv q \geq m - 1 + n$. Proto

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{r} + g(\mathbf{v}, \mathbf{n}) \\
 &\mapsto^* \mathbf{r} + \mathbf{q} \\
 &\mapsto \mathbf{t}
 \end{aligned}$$

kde $\mathbf{t} \equiv r + q$. Jelikož $r \geq m + n + 1$ a $q \geq m - 1 + n$, platí

$$r + q \geq (m + n + 1) + (m - 1 + n) = 2(m + n) \geq m + n$$

Příklad 3.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + \mathbf{if\ 2 * x\ then\ h(x - 1) + f(x - 1)\ else\ 3} \\
 h(x) &= \mathbf{if\ x\ then\ h(x - 1) * f(x - 1)\ else\ 1}
 \end{aligned}$$

Zapište výpočet výrazu $f(2)$ jako posloupnost kroků výpočtu.

Řešení

$$\begin{aligned}
 &f(2) \\
 &\mapsto 2 + \mathbf{if\ 2 * 2\ then\ h(2 - 1) + f(2 - 1)\ else\ 3} \\
 &\mapsto 2 + \mathbf{if\ 4\ then\ h(2 - 1) + f(2 - 1)\ else\ 3} \\
 &\mapsto 2 + (h(2 - 1) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + (h(1) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((\mathbf{if\ 1\ then\ h(1 - 1) * f(1 - 1)\ else\ 1}) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((h(1 - 1) * f(1 - 1)) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((h(0) * f(1 - 1)) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + (((\mathbf{if\ 0\ then\ h(0 - 1) * f(0 - 1)\ else\ 1}) * f(1 - 1)) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((1 * f(1 - 1)) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((1 * f(0)) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((1 * (0 + \mathbf{if\ 2 * 0\ then\ h(0 - 1) + f(0 - 1)\ else\ 3})) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((1 * (0 + \mathbf{if\ 0\ then\ h(0 - 1) + f(0 - 1)\ else\ 3})) + f(2 - 1)) \\
 &\mapsto 2 + ((1 * (0 + 3)) + f(2 - 1))
 \end{aligned}$$

$\mapsto 2 + ((1 * 3) + f(2 - 1))$
 $\mapsto 2 + (3 + f(2 - 1))$
 $\mapsto 2 + (3 + f(1))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + \text{if } 2 * 1 \text{ then } h(1 - 1) + f(1 - 1) \text{ else } 3))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + \text{if } 2 \text{ then } h(1 - 1) + f(1 - 1) \text{ else } 3))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (h(1 - 1) + f(1 - 1))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (h(0) + f(1 - 1))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + ((\text{if } 0 \text{ then } h(0 - 1) * f(0 - 1) \text{ else } 1) + f(1 - 1))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + f(1 - 1))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + f(0))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + (0 + \text{if } 2 * 0 \text{ then } h(0 - 1) + f(0 - 1) \text{ else } 3))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + (0 + \text{if } 0 \text{ then } h(0 - 1) + f(0 - 1) \text{ else } 3))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + (0 + 3))))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + (1 + 3)))$
 $\mapsto 2 + (3 + (1 + 4))$
 $\mapsto 2 + (3 + 5)$
 $\mapsto 2 + 8$
 $\mapsto 10$

Příklad 4.

Uvažme deklaraci obsahující rovnice

$$f(x) = \text{if } x \text{ then } x + h(x - 1) \text{ else } 0$$

$$h(x) = \text{if } x \text{ then } x + f(x - 1) \text{ else } 0$$

Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$, kde $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=0}^n i$.

Řešení

Indukcí vzhledem k n dokážeme následující silnější tvrzení: Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ platí $f(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$ a $h(\mathbf{n}) \mapsto^* \mathbf{m}$, kde $\mathbf{n} \equiv n$ a $\mathbf{m} \equiv \sum_{i=0}^n i$.

Základní krok: $n = 0$. Platí

$$f(\mathbf{0})$$

$$\mapsto \text{if } \mathbf{0} \text{ then } \mathbf{0} + h(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \text{ else } \mathbf{0}$$

$$\mapsto \mathbf{0}$$

a podobně

$$h(\mathbf{0})$$

$$\mapsto \text{if } \mathbf{0} \text{ then } \mathbf{0} + f(\mathbf{0} - \mathbf{1}) \text{ else } \mathbf{0}$$

$$\mapsto \mathbf{0}$$

Indukční krok: Nechť $\mathbf{k} \equiv n + 1$. Potom platí

$$f(\mathbf{k})$$

$$\mapsto \text{if } \mathbf{k} \text{ then } \mathbf{k} + h(\mathbf{k} - \mathbf{1}) \text{ else } \mathbf{0}$$

$$\mapsto \mathbf{k} + h(\mathbf{k} - \mathbf{1})$$

$$\mapsto \mathbf{k} + h(\mathbf{w})$$

kde $\mathbf{w} \equiv n$. Podle I.P. platí $h(\mathbf{w}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv \sum_{i=0}^n i$. Proto

$$\begin{aligned}
& \mathbf{k} + h(\mathbf{w}) \\
& \mapsto^* \mathbf{k} + \mathbf{p} \\
& \mapsto \mathbf{q}
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{q} \equiv n + 1 + \sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^{n+1} i$.

Celkem jsme tedy dokázali, že $f(\mathbf{k}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv \sum_{i=0}^{n+1} i$.

Podobně platí

$$\begin{aligned}
& h(\mathbf{k}) \\
& \mapsto \text{if } \mathbf{k} \text{ then } \mathbf{k} + f(\mathbf{k} - \mathbf{1}) \text{ else } \mathbf{0} \\
& \mapsto \mathbf{k} + f(\mathbf{k} - \mathbf{1}) \\
& \mapsto \mathbf{k} + f(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{w} \equiv n$. Podle I.P. platí $f(\mathbf{w}) \mapsto^* \mathbf{p}$, kde $\mathbf{p} \equiv \sum_{i=0}^n i$. Proto

$$\begin{aligned}
& \mathbf{k} + f(\mathbf{w}) \\
& \mapsto^* \mathbf{k} + \mathbf{p} \\
& \mapsto \mathbf{q}
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{q} \equiv n + 1 + \sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^{n+1} i$.

Celkem jsme tedy dokázali, že $h(\mathbf{k}) \mapsto^* \mathbf{q}$, kde $\mathbf{q} \equiv \sum_{i=0}^{n+1} i$.

Uvědomte si, proč jsme museli zesílit dokazované tvrzení: Abychom mohli dokázat tvrzení indukčního kroku pro funkci f , museli jsme využít indukční předpoklad pro funkci h . Abychom mohli dokázat tvrzení indukčního kroku pro funkci h , museli jsme využít indukční předpoklad pro funkci f . Nebylo proto možné tvrzení dokázat nejprve pro jednu a potom pro druhou funkci. Museli jsme současně dokazovat tvrzení o obou funkcích.