

# IB000 Úvod do informatiky — příklady na procvičení

## Sada 3 — Zadání

### Téma

Operace nad množinami. Relace mezi množinami. Skládání a inverze relací. Totální a partiální funkce. Injekce, surjekce, bijekce.

### Příklad 1.

Mějme množiny  $A_1 = \{1, 2, 3\}$ ,  $A_2 = \{a, b, c\}$  a  $A_3 = \{1, 2\}$ . Pro danou relaci  $R \subseteq A_i \times A_j$  určete výčtem jejich prvků všechny totální funkce  $f : A_i \rightarrow A_j$  takové, že  $f \subseteq R$ . Které z nich jsou injektivní, surjektivní, resp. bijektivní?

- a)  $R = \{(1, a), (2, a), (3, b), (2, c), (3, c)\} \subseteq A_1 \times A_2$
- b)  $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\} \subseteq A_1 \times A_3$
- c)  $R = A_3 \times A_2 \subseteq A_1 \times A_2$

### Příklad 2.

Nechť  $X$  je množina. Identitou nad  $X$  nazýváme binární relaci  $\text{id}_X$  nad  $X$  definovanou vztahem

$$\text{id}_X = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

Nechť  $A$  a  $B$  jsou množiny. Pro následující případy nalezněte funkce  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow A$  takové, že  $g \circ f = \text{id}_A$ . Existují takové funkce, aby navíc platilo  $f \circ g = \text{id}_B$ ? Existují relace  $R \subseteq A \times B$  a  $S \subseteq B \times A$ , které nejsou funkcemi, a které splňují  $S \circ R = \text{id}_A$ . Existují takové relace, aby navíc platilo  $R \circ S = \text{id}_B$ ? Svá tvrzení zdůvodněte.

- a)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{a, b, c\}$
- b)  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{1, 2, 3, 4\}$
- c)  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{1, 2\}$
- d)  $A = \emptyset$ ,  $B = \{1\}$
- e)  $A = \{1\}$ ,  $B = \emptyset$

Poznámky k zadání a řešení: Cílem tohoto příkladu je, abyste se zamysleli nad rozdílem mezi obecnou relací a funkcí. Při řešení zjistíte, že zadání dovoluje v některých místech více interpretací. K řešení si můžete vybrat jen jednu z nich nebo lépe postupně zkusit všechny.

Protože se jedná o konečné případy, kreslete si při řešení obrázky. Řešení pak ale vždy zapište i ve formálním matematickém tvaru!

### Příklad 3.

Mějme relaci  $R = \{(i, 2i) \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ .

- a) Určete relaci  $R^{-1}$ .
- b) Určete relaci  $R \circ R$ . Dosazení do definice nestačí! Zápis zjednodušte!

### Příklad 4.

Mějme relaci  $R = \{(i, j) \mid \text{existuje } k \in \mathbb{N} \text{ tak, že } i = k \cdot j\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

- a) Určete relaci  $R^{-1}$ .
- b) Rozhodněte, zda platí  $R = R \circ R$  a své tvrzení dokažte.

**Příklad 5.**

Mějme relaci  $\text{plus} \subseteq (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N}$ ,  $\text{plus} = \{((i, j), i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ .

- a) Určete relaci  $\text{plus} \circ \text{plus}$ .
- b) Určete relaci  $\text{plus}^{-1} \circ \text{plus}$ .
- c) Určete relaci  $\text{plus} \circ \text{plus}^{-1}$ .
- d) Určete relaci  $\text{plus}^{-1} \circ \text{plus}^{-1}$ .

Dosazení do definice složení relací nestačí! Zápisy zjednodušte!

**Příklad 6.**

Nechť  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  je parciální funkce definovaná předpisem

$$f(x) = \begin{cases} x/5 & \text{pokud } x \text{ je dělitelné pěti} \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$$

Je tato funkce injektivní, surjektivní, bijektivní? Uvažme relaci  $f^{-1}$ . Je tato relace funkce? Je to totální funkce? Pokud ano, je injektivní, surjektivní, bijektivní?

**Příklad 7.**

Nechť  $f : A \rightarrow B$  a  $g : B \rightarrow C$  jsou injektivní funkce. Rozhodněte, zda  $g \circ f$  a  $f \circ g$  jsou injektivní funkce. Své tvrzení dokažte.