2 Důkazové techniky, Indukce

Náš hlubší úvod do matematických formalismů pro informatiku začneme základním přehledem technik matematických důkazů. Z nich pro nás asi nejdůležitější je technika důkazů *matematickou indukcí*, která je svou podstatou velmi blízká počítačovým programům (jako iterace cyklů).

Stručný přehled lekce

* Základní důkazové techniky: přímé, nepřímé a sporem. Důkazy „tehdy a jen tehdy“.
* Důkazy matematickou indukcí, jejich variace a úskalí.
* Metody zesílení tvrzení a rozšíření základu v indukci.

2.1 Přehled základních důkazových technik

- *Přímé odvození.* To je způsob, o kterém jsme se dosud bavili. □
- *Kontrapozice* (také *obrácením* či *nepřímý důkaz*). Místo věty

  „Jestliže platí předpoklady, pak platí závěr."

  budeme dokazovat ekvivalentní větu

  „Jestliže neplatí závěr, pak neplatí alespoň jeden z předpokladů." □
- *Důkaz sporem*. Místo věty

  „Jestliže platí předpoklady, pak platí závěr."

  budeme dokazovat větu

  „Jestliže platí předpoklady a platí opak závěru, pak platí opak jednoho z předpokladů (nebo platí jiné zjevně nepravdivé tvrzení)." □
- *Matematická indukce.* Pokročilá technika. . .

Příklad důkazu kontrapozicí

Definice: *Prvočíslo* $p > 1$ nemá jiné dělitele než 1 a p.

Příklad 2.1. *na důkaz kontrapozicí (obrácením).*

> **Věta**. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.* □

Důkaz: *Obráceného tvrzení* – budeme tedy dokazovat, že je-li p sudé, pak p buď není větší než 2, nebo p není prvočíslo. Jsou dvě možnosti:

- $p \leq 2$. Pak p není větší než 2.
- $p > 2$. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké celé $k > 1$, tedy p není prvočíslo. □

□

Poznámka: Důkazy kontrapozicí pracují s *negací* (opakem) předpokladů a závěru. Je-li např. závěr komplikované tvrzení tvaru

> „z toho, že z A a B plyne C, vyplývá, že z A nebo C plyne A a B“,

není pouhou intuicí snadné zjistit, co je vlastně jeho negací. Jak uvidíme v pozdějších lekcích, užitím jednoduché induktivní metody lze podobná tvrzení negovat zcela mechanicky.

Příklady důkazu sporem

Příklad 2.2. *Jiný přístup k Důkazu 2.1.*

Věta. *Jestliže p je prvočíslo větší než 2, pak p je liché.* □

Důkaz *sporem*: Nechť tedy p je prvočíslo větší než 2, které je sudé. Pak $p = 2 \cdot k$ pro nějaké $k > 1$, tedy p není prvočíslo, spor (s předpokladem, že p je prvočíslo). □

□

Příklad 2.3.

Věta. *Číslo $\sqrt{2}$ není racionální.* □

Důkaz *sporem*: Nechť tedy $\sqrt{2}$ je racionální, tj. nechť existují nesoudělná celá kladná čísla r, s taková, že $\sqrt{2} = r/s$. □

- Pak $2 = r^2/s^2$, tedy $r^2 = 2 \cdot s^2$, proto r^2 je dělitelné dvěma. Z toho plyne, že i r je dělitelné dvěma (proč?). □
- Jelikož r je dělitelné dvěma, je r^2 dělitelné dokonce čtyřmi, tedy $r^2 = 4 \cdot m$ pro nějaké m. Pak ale také $4 \cdot m = 2 \cdot s^2$, tedy $2 \cdot m = s^2$ a proto s^2 je dělitelné dvěma. □
- Z toho plyne, že s je také dělitelné dvěma. Celkem dostáváme, že r i s jsou dělitelné dvěma, jsou tedy soudělná a to je spor. □

□

„Nevíte-li, jak nějakou větu dokázat, zkuste důkaz sporem…“

2.2 Věty typu „tehdy a jen tehdy“

- Uvažujme nyní (v matematice poměrně hojné) věty tvaru

  „Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *tehdy a jen tehdy*, platí-li tvrzení B.“□

- Příklady jiných formulací téže věty jsou:
  - Za předpokladů P je tvrzení B *nutnou a postačující* podmínkou pro platnost tvrzení A.□
  - Za předpokladů P je tvrzení A nutnou a postačující podmínkou pro platnost tvrzení B.□
  - Nechť platí předpoklady P. Pak tvrzení A platí *právě tehdy* když platí tvrzení B.□

- Důkaz vět tohoto tvaru má vždy dvě části(!). Je třeba dokázat:
  - Jestliže platí předpoklady P a tvrzení A, pak platí tvrzení B.
  - Jestliže platí předpoklady P a tvrzení B, pak platí tvrzení A.

2.3 Matematická indukce

- Jde o důkazovou techniku aplikovatelnou na tvrzení tohoto typu:

  „Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$."

  Zde k_0 je nějaké pevné přir. číslo a $T(n)$ je tvrzení parametrizované čís. n.□

  Příkladem je třeba tvrzení:

  Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ oblastí.□

- **Princip matematické indukce** říká (coby axiom), že k důkazu věty

  „Pro každé přirozené (celé) $n \geq k_0$ platí $T(n)$."

  stačí ověřit platnost těchto dvou tvrzení:

  * $T(k_0)$ (tzv. *báze* neboli základ indukce)
  * *Pro každé $n \geq k_0$; jestliže platí $T(n)$,* *(indukční předpoklad)*
    pak platí také $T(n+1)$. *(indukční krok)*□

- **Pozor, v tomto předmětu počítáme 0 za přirozené číslo!**

Příklady důkazů indukcí

Příklad 2.5. *Velmi jednoduchá a přímočará indukce.*

> **Věta**. *Pro každé $n \geq 1$ je stejná pravděpodobnost, že při současném hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, jako, že bude lichý.* □

Důkaz: *Základ indukce* je zde zřejmý: Na jedné kostce (poctivé!) jsou tři lichá a tři sudá čísla, takže obě skupiny padají se stejnou pravděpodobností. □

Indukční krok pro $n \geq 1$: Nechť p_n^s pravděpodobnost, že při hodu n kostkami bude výsledný součet sudý, a p_n^l je pravděpodobnost lichého. Podle indukčního předpokladu je $p_n^s = p_n^l = \frac{1}{2}$. □

Hoďme navíc $(n+1)$-ní kostkou. Podle toho, zda na ní padne liché nebo sudé číslo, je pravděpodobnost celkového sudého součtu rovna

$$\frac{3}{6}p_n^l + \frac{3}{6}p_n^s = \frac{1}{2}$$

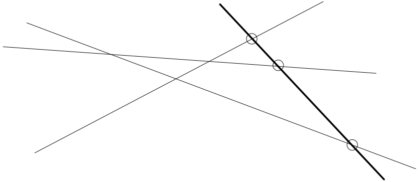
a stejně pro pravděpodobnost celkového lichého součtu. □

Příklad 2.6. *Ukázka důkazové „síly“ principu matematické indukce.*

Věta. *Pro každé $n \geq 0$ platí, že n přímek dělí rovinu nejvýše na*

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1$$

oblastí.



Důkaz: □Pro bázi indukce stačí, že 0 přímek dělí rovinu na jednu část. (Všimněte si také, že 1 přímka dělí rovinu na dvě části, jen pro lepší pochopení důkazu.)

Mějme nyní rovinu rozdělenou n přímkami na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1)+1$ částí.□ Další, $(n+1)$-ní přímka je rozdělena průsečíky s předchozími přímkami na nejvýše $n+1$ úseků a každý z nich oddělí novou část roviny. □Celkem tedy bude rovina rozdělena našimi přímkami na nejvýše tento počet oblastí:

$$\frac{1}{2}n(n+1)+1+(n+1) \;=\; \frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}\cdot 2(n+1)+1 \;=\; \frac{1}{2}(n+1)(n+2)+1$$

□

Příklad 2.7. *Další indukční důkaz rozepsaný v podrobných krocích.*

Věta. *Pro každé* $n \geq 0$ *platí* $\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

Důkaz *indukcí* vzhledem k n.

- *Báze:* Musíme dokázat tvrzení $T(0)$, což je v tomto případě rovnost $\sum_{j=0}^{0} j = \frac{0(0+1)}{2}$. Tato rovnost (zjevně) platí.

- *Indukční krok:* Musíme dokázat následující tvrzení:

Jestliže platí $\sum_{j=0}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$ *kde* $i \geq 0$, *pak platí* $\sum_{j=0}^{i+1} j = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$.

Předpokládejme tedy, že $\sum_{j=0}^{i} j = \frac{i(i+1)}{2}$ a pokusme se dokázat, že pak také $\sum_{j=0}^{i+1} j = \frac{(i+1)(i+1+1)}{2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$. To už plyne úpravou:

$$\sum_{j=0}^{i+1} j = \sum_{j=0}^{i} j + (i+1) = \frac{i(i+1)}{2} + (i+1) = \frac{i(i+1) + 2(i+1)}{2} = \frac{(i+1)(i+2)}{2}$$

Podle principu matematické indukce je celý důkaz hotov. □

2.4 Komentáře k matematické indukci

Pro správné a úspěšné použití indukce v dokazování je vhodné si zapamatovat několik cenných rad:

- Základní trik všech důkazů matematickou indukcí je vhodná reformulace tvrzení $T(n+1)$ tak, aby se „odvolávalo“ na tvrzení $T(n)$.
  - Dobře se vždy podívejte, v čem se liší tvrzení $T(n+1)$ od tvrzení $T(n)$. Tento „rozdíl“ budete muset v důkaze zdůvodnit. □
- Pozor, občas je potřeba „zesílit“ tvrzení $T(n)$, aby indukční krok správně „fungoval“.□
- Často se chybuje v důkazu indukčního kroku, neboť ten bývá většinou výrazně obtížnější než báze,
  ale o to zrádnější jsou chyby v samotné zdánlivě snadné bázi!
  - Dejte si dobrý pozor, od které hodnoty $n \geq k_0$ je indukční krok univerzálně platný…

Příklad 2.8. *Když je nutno indukční krok zesílit. . .*

Věta. *Pro každé $n \geq 1$ platí*

$$s(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} < 1\,.$$

Důkaz: *Báze indukce* je zřejmá, neboť $\frac{1}{1\cdot 2} < 1$.

Co však *indukční krok*? Předpoklad $s(n) < 1$ je sám o sobě „příliš slabý“ na to, aby bylo možno tvrdit $s(n+1) = s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < 1$.

Neznamená to ještě, že by tvrzení nebylo platné, jen je potřeba náš indukční předpoklad zesílit. Budeme dokazovat

„Pro každé přirozené $n \geq 1$ platí $s(n) \leq 1 - \frac{1}{n+1} < 1\,.$“

To platí pro $n = 1$ a dále už úpravou jen dokončíme zesílený indukční krok:

$$s(n+1) \;=\; s(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \;\leq\; 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \;1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \;=\; 1 - \frac{1}{n+2}$$

□

Rozšíření báze a předpokladu

Mimo zesilování tvrzení indukčního kroku jsme někdy okolnostmi nuceni i k rozšiřování samotné báze indukce a s ní indukčního předpokladu na více než jednu hodnotu parametru n. □

– Můžeme například předpokládat platnost (parametrizovaných) tvrzení $T(n)$ i $T(n+1)$ zároveň, a pak odvozovat platnost $T(n+2)$.

  Toto lze samozřejmě zobecnit na jakýkoliv počet předpokládaných parametrů. □

– Můžeme dokonce předpokládat platnost tvrzení $T(j)$ pro všechna $j = k_0, k_0+1, \ldots, n$ najednou a dokazovat $T(n+1)$.

  (Toto typicky využijeme v případech, kdy indukční krok „rozdělí“ problém $T(n+1)$ na dvě menší části a z nich pak odvodí platnost $T(n+1)$.) □

Fakt: Obě prezentovaná „rozšíření“ jsou v konečném důsledku jen speciálními instancemi základní matematické indukce; použité rozšířené možnosti pouze zjednodušují formální zápis důkazu.

Příklad 2.9. *Když je nutno rozšířit bázi a indukční předpoklad. . .*

Věta. *Nechť funkce f pro každé $n \geq 0$ splňuje vztah $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$. Pokud platí $f(0) = 1$ a zároveň $f(1) = 2$, tak platí $f(n) = n+1$ pro všechna přirozená $n \geq 0$.* □

Důkaz: Už samotný pohled na daný vztah $f(n+2) = 2f(n+1) - f(n)$ naznačuje, že bychom měli rozšířit indukční předpoklad (a krok) zhruba takto:

Pro každé $n \geq 0$; jestliže platí $T(n)$; neboli $f(n) = n+1$, a zároveň platí $T(n+1)$; $f(n+1) = n+2$, pak platí také $T(n+2)$; $f(n+2) = n+3$.

Báze indukce – □ pozor, zde už musíme ověřit dvě hodnoty

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 1 = 2\,.$$ □

Náš *indukční krok* tak nyní může využít celého rozšířeného předpokladu, znalosti hodnot $f(n)$ i $f(n+1)$, pro ověření

$$f(n+2) = 2f(n+1) - f(n) = 2 \cdot (n+1+1) - (n+1) = n+3 = n+2+1\,.$$

□

Jak by tento důkaz měl být formulován v „tradiční“ indukci? □(„Substitucí“.)

Závěrem malý „problém“

Příklad 2.10. *Aneb jak snadno lze v matematické indukci udělat chybu.*

Věta. *(„nevěta“)*
V každém stádu o $n \geq 1$ koních mají všichni koně stejnou barvu. □

Důkaz indukcí vzhledem k n.

Báze: Ve stádu o jednom koni mají všichni koně stejnou barvu. □

Indukční krok: Nechť $S = \{K_1, \dots, K_{n+1}\}$ je stádo o $n+1$ koních. Dokážeme, že všichni koně mají stejnou barvu. Uvažme dvě menší stáda:

- $S' = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$
- $S'' = \{K_2, \dots, K_n, K_{n+1}\}$ □

Podle indukčního předpokladu mají všichni koně ve stádu S' stejnou barvu B'. Podobně všichni koně ve stádu S'' mají podle indukčního předpokladu stejnou barvu B''. □Dokážeme, že $B' = B''$, tedy že všichni koně ve stádu S mají stejnou barvu. To ale plyne z toho, že koně $K_2, \dots, K_n$ patří jak do stáda S', tak i do stáda S''. □

□

Ale to už je podvod! Vidíte, kde?