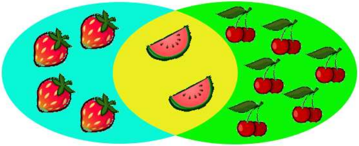
3 Množiny, Relace a Funkce

V přehledu matematických formalismů informatiky se v této lekci zaměříme na základní „datové typy“ matematiky, tj. na množiny, relace a funkce. O množinách jste sice zajisté slyšeli už na základní škole, ale podstatou našeho předmětu je uvést povětšinou neformálně známé pojmy na patřičnou formální úroveň nutnou pro teoretické základy informatiky.



□

Stručný přehled lekce

* Uvedení množin a operací množinového kalkulu.
* Některé vlastnosti množin, princip inkluze a exkluze.
* Relace a definice funkcí, základní vlastnosti.
* Posloupnosti a rekurentní vztahy.

3.1 Pojem množiny

* Co je vlastně **množina**?

Na tuto otázku bohužel není zcela jednoduchá odpověď...

- Naivní pohled: „*Množina je soubor prvků a je svými prvky plně určena.*"
- Pozor, není skutečného rozdílu mezi „množinami" a „prvky".
  Množiny mohou být prvky jiných množin!
- Příklady: $\emptyset$, $\{a,b\}$, $\{b,a\}$, $\{a,b,a\}$, $\{\{a,b\}\}$, $\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$,
  $\{x \mid x \text{ je liché přirozené číslo}\}$

Značení: Počet prvků (*mohutnost*) množiny A zapisujeme $|A|$.

- $|\emptyset| = 0$, $|\{\emptyset\}| = 1$, $|\{a,b,c\}| = 3$, $|\{\{a,b\},c\}| = 2$

Značení množin a jejich prvků:

- $x \in M$ „x je *prvkem* množiny M".
- některé vlastnosti $a \in \{a,b\}$, $a \not\in \{\{a,b\}\}$, $\{a,b\} \in \{\{a,b\}\}$,
- *prázdná* množina $\emptyset$, $a \not\in \emptyset$, $\emptyset \in \{\emptyset\}$, $\emptyset \not\in \emptyset$,
- *rovnost* množin $\{a,b\} = \{b,a\} = \{a,b,a\}$, $\{a,b\} \neq \{\{a,b\}\}$.

Definice: Množina A je *podmnožinou* množiny B, právě když každý prvek A je prvkem B. Píšeme $A \subseteq B$ nebo také $B \supseteq A$; říkáme také, že se jedná o *inkluzi*. □

- Platí $\{a\} \subseteq \{a\} \subseteq \{a,b\} \not\subseteq \{\{a,b\}\}$, $\quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}$,
- $A \subset B$ právě když $A \subseteq B$ a $A \neq B$ $\quad$ (A je *vlastní* podmnožinou B).□

Definice: Dvě množiny jsou si *rovny* $A = B$ právě když $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

- Podle definice jsou množiny A a B stejné, mají-li stejné prvky.□
- Důkaz rovnosti množin $A = B$ má obvykle dvě části:
  Odděleně se dokáží inkluze $A \subseteq B$ a $B \subseteq A$.

Značení: Některé běžné množiny v matematice se značí

* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina přirozených čísel,
* $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých čísel,
* $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ je množina celých kladných čísel,
* $\mathbb{Q}$ je množina racionálních čísel (zlomků).
* $\mathbb{R}$ je množina reálných čísel. □

Poznámka: Tyto uvedené číselné množiny jsou vesměs *nekonečné*, na rozdíl od konečných množin uvažovaných v předchozím „naivním" pohledu. □

Pojem nekonečné množiny se přímo v matematice objevil až teprve v 19. století a bylo s ním spojeno několik paradoxů ukazujících, že naivní pohled na teorii množin pro nekonečné množiny nedostačuje. My se k problematice nekonečných množin, Kantorově větě a Russelově paradoxu vrátíme v závěru našeho předmětu.

3.2 Množinové operace

Definice: *Sjednocení* $\cup$ a *průnik* $\cap$ dvou množin A, B definujeme

$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{x \mid x \in A \text{ nebo } x \in B\}\,, \\
A \cap B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \in B\}\,.
\end{aligned}
$$

- Příklady $\{a,b,c\} \cup \{a,d\} = \{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c\} \cap \{a,d\} = \{a\}$.
- Vždy platí „distributivita" $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ a $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Definice: Pro libovolný počet množin indexovaných pomocí I rozšířeně

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro } \text{nějaké } i \in I\}\,, \\
\bigcap_{i \in I} A_i &= \{x \mid x \in A_i \text{ pro } \text{každé } i \in I\}\,.
\end{aligned}
$$

- Nechť $A_i = \{2 \cdot i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ je množina všech sudých přirozených čísel.
- Nechť $B_i = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \geq i\}$ pro každé $i \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} B_i = \emptyset$.

Definice: *Rozdíl* $\setminus$ a *symetrický rozdíl* Δ dvou množin A, B definujeme

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{x \mid x \in A \text{ a současně } x \notin B\}\,, \\ A \Delta B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,. \end{aligned}$$

- Příklady $\{a,b,c\} \setminus \{a,b,d\} = \{c\}$, $\{a,b,c\} \Delta \{a,b,d\} = \{c,d\}$.
- Vždy platí například $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ apod.

Definice: Nechť $A \subseteq M$. *Doplněk A vzhledem k M* je množina $\overline{A} = M \setminus A$.

- Jedná se o poněkud specifickou operaci, která musí být vztažena vzhledem k *nosné množině M* !
- Je-li $M = \{a,b,c\}$, pak $\overline{\{a,b\}} = \{c\}$. Je-li $M = \{a,b\}$, pak $\overline{\{a,b\}} = \emptyset$.
- Vždy pro $A \subseteq M$ platí $\overline{\overline{A}} = A$ („dvojí“ doplněk).
- Vždy pro $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ a $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
  (Viz Vennovy diagramy.)

Uspořádané dvojice a kartézský součin

Definice: *Uspořádaná dvojice* (a, b) je zadána množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Fakt: Platí $(a, b) = (c, d)$ právě když $a = c$ a současně $b = d$.

Příklad 3.1. *Co je podle definice* (a, a)*?*

$(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}$.

Definice 3.2. **Kartézský součin** dvou množin A, B definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic ze složek z A a B

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

- Příklady $\{a, b\} \times \{a\} = \{(a, a), (b, a)\}$,
  $\{c, d\} \times \{a, b\} = \{(c, a), (c, b), (d, a), (d, b)\}$.
- Platí $\emptyset \times X = \emptyset$ pro každou množinu X.
- Mnemotechnická pomůcka

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Skládání součinu

Definice: Pro každé $k \in \mathbb{N}, k > 0$ definujeme *uspořádanou k-tici* $(a_1, \cdots, a_k)$ induktivně takto

- $(a_1) = a_1$,
- $(a_1, \cdots, a_i, a_{i+1}) = ((a_1, \cdots, a_i), a_{i+1})$. □

Fakt: Platí $(a_1, \cdots, a_k) = (b_1, \cdots, b_k)$ právě když $a_i = b_i$ pro každé $1 \le i \le k$. □

Definice *kartézského součinu* více množin: Pro každé $k \in \mathbb{N}$ definujeme

$$A_1 \times \cdots \times A_k = \{(a_1, \cdots, a_k) \mid a_i \in A_i \text{ pro každé } 1 \le i \le k\}. \square$$

- Příklad $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(i, j, k) \mid i, j, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Co je A^0? □ $\{\emptyset\}$, neboť jediná uspořádaná 0-tice je právě prázdná $\emptyset$.

Poznámka: Podle uvedené definice není součin asociativní, tj. obecně nemusí platit, že $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$. □

V matematické praxi je někdy výhodnější uvažovat „upravenou“ definici, podle níž součin asociativní je. Pro účely této přednášky není podstatné, k jaké definici se přikloníme. Prezentované definice a věty „fungují“ pro obě varianty.

Potenční množina

Definice 3.3. **Potenční množina** množiny A,
neboli množina všech podmnožin, je definovaná vztahem

$$2^A = \{B \mid B \subseteq A\}\,.$$

- Platí například $2^{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$,
- $2^\emptyset = \{\emptyset\}$, $2^{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,
- $2^{\{a\}\times\{a,b\}} = \{\emptyset, \{(a,a)\}, \{(a,b)\}, \{(a,a),(a,b)\}\}$.

Věta 3.4. *Počet prvků potenční množiny splňuje* $|2^A| = 2^{|A|}$.

Důkaz: Stručně indukcí podle $|A|$: Pro $A = \emptyset$ platí $|2^A| = |\{\emptyset\}| = 1$.

Pro každý další prvek $b \notin A$ rozdělíme všechny podmnožiny $A \cup \{b\}$ „napolovic“ na ty neobsahující b a na ty obsahující b, tudíž

$$\left|2^{A\cup\{b\}}\right| = 2 \cdot \left|2^A\right| = 2^{|A|+1} = 2^{|A\cup\{b\}|}\,.$$

□

3.3 Porovnávání a určení množin

Věta 3.5. *Pro každé dvě množiny $A, B \subseteq M$ platí $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.* $\square$

Důkaz v obou směrech rovnosti.

- $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$: $\square$
  - ∗ Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A \cup B}$, právě když $x \notin A \cup B$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$.
  - ∗ To znamená $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. $\square$
- $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cap \overline{B}$:
  - ∗ Pro $x \in M$ platí $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, právě když $x \in \overline{A}$ a zároveň $x \in \overline{B}$, neboli když zároveň $x \notin A$ a $x \notin B$. $\square$
  - ∗ To znamená $x \notin A \cup B$, z čehož vyplývá požadované $x \in \overline{A \cup B}$.

$\square$

Věta 3.6. *Pro každé tři množiny A, B, C platí*

$$A \setminus (B \cap C) \;=\; (A \setminus B)\, \cup (A \setminus C)\,.\square$$

Důkaz.

- $A \setminus (B \cap C) \;\subseteq\; (A \setminus B)\, \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in A \setminus (B \cap C)$, pak $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, neboli $x \notin B$ nebo $x \notin C$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in (A \setminus B)$, pro druhou $x \in (A \setminus C)$.$\square$
- Naopak $A \setminus (B \cap C) \;\supseteq\; (A \setminus B)\, \cup (A \setminus C)$:
  - ∗ Je-li $x \in (A \setminus B)\, \cup (A \setminus C)$, pak $x \in (A \setminus B)$ nebo $x \in (A \setminus C)$.
  - ∗ Pro první možnost máme $x \in A$ a zároveň $x \notin B$, z čehož plyne $x \in A$ a zároveň $x \notin (B \cap C)$, a tudíž $x \in A \setminus (B \cap C)$.$\square$
  - ∗ Druhá možnost je analogická.

$\square$

Charakteristický vektor (pod)množiny

V případech, kdy všechny uvažované množiny jsou podmnožinami nějaké *nosné množiny* X, což není neobvyklé v programátorských aplikacích, s výhodou využijeme následující reprezentaci množin.

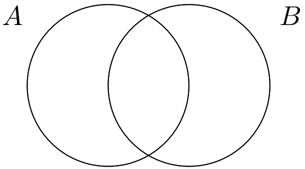
Definice: Mějme nosnou množinu $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Pro $A \subseteq X$ definujeme charakteristický vektor χ_A jako

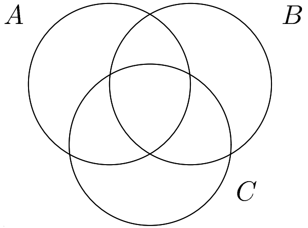
$$\chi_A = (c_1, c_2, \ldots, c_n), \text{ kde } c_i = 1 \text{ pro } x_i \in A \text{ a } c_i = 0 \text{ jinak.} \square$$

- Platí $A = B$ právě když $\chi_A = \chi_B$.
- Množinové operace jsou realizovány „bitovými funkcemi“ sjednocení $\sim$ OR, průnik $\sim$ AND, symetrický rozdíl $\sim$ XOR.

Princip inkluze a exkluze

Tento důležitý a zajímavý kombinatorický princip je někdy také nazýván „princip *zapojení a vypojení*“.





Věta 3.7. *Počet prvků ve sjednocení dvou či tří množin spočítáme:*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \square$$

Všimněte si, že větu lze stejně tak využít k výpočtu počtu prvků v průniku množin. . .

Příklad 3.8. *Z* 1000 *televizí jich při první kontrole na výrobní lince má* 5 *vadnou obrazovku,* 10 *je poškrábaných a* 12 *má jinou vadu. Přitom* 3 *televize mají současně všechny tři vady a* 4 *jiné jsou poškrábané a mají jinou vadu.*
Kolik televizí je celkem vadných? □

Řešení: Dosazením $|A| = 5$, $|B| = 10$, $|C| = 12$, $|A \cap B \cap C| = 3$, $|A \cap B| = 3 + 0$, $|A \cap C| = 3 + 0$, $|B \cap C| = 3 + 4$ do Věty 3.7 zjistíme výsledek 17. □ □

Poznámka. Jen stručně, bez důkazu a bližšího vysvětlení, si uvedeme obecnou formu principu inkluze a exkluze:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}} (-1)^{|I|-1} \cdot \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

(Jeho znalost nebude v předmětu vyžadována.)

3.4 Relace a funkce mezi (nad) množinami

Dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme zvýšenou pozornost.

Definice 3.9. **Relace** mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_k . \square$$

Pokud $A_1 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *k-ární relaci R na A*. $\square$

Příklady relací.

- $\{(1,a),(2,a)\}$ je relace mezi $\{1,2,3\}$ a $\{a,b\}$.
- $\{(i, 2\cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na $\mathbb{N}$.$\square$
- $\{(i,j,i+j) \mid i,j \in \mathbb{N}\}$ je ternární relace na $\mathbb{N}$.
- $\{3\cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je unární relace na $\mathbb{N}$.$\square$
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A?

Funkce mezi množinami

Definice 3.10. **(Totální) funkce** z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. □

Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f.

Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní“ hodnotě x přiřazena jednoznačně „výstupní“ hodnota y.

(V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme. . .) □

Značení: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B. □

Funkcím se také říká *zobrazení*.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x+8$. Tj. $f = \{(x, x+8) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$. Tj. $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.□

V parciální funkci p nemusí být pro některé „vstupní“ hodnoty x funkční hodnota definována.

Pro *nedefinovanou* hodnotu používáme znak $\perp$. □

Další příklady funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

  Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □

- Také funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) \;=\; \sqrt{x}$$

  je jen parciální – není definována pro $x < 0$.□

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich rodná čísla?

3.5 Posloupnosti a rekurentní vztahy

Definice: Funkce $p : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ se nazývá *posloupnost*.

Mimo „funkčního“ zápisu $p(n)$ často používáme „indexovou“ formu zápisu p_n.

Poznámka: Obor hodnot posloupnosti může být i jiný než reálná čísla. Na posloupnost se také díváme jako na „seřazení“ vybraných prvků z oboru hodnot, s povoleným opakováním hodnot (nemusí být prostá).

Také def. obor posl. může začínat od nuly nebo i od jedničky, jak je v aplikacích potřeba.

- Příklady posloupností:
  - $p_0 = 0,\ p_1 = 2, \ldots, p_i = 2i, \ldots$ je posloupnost sudých nezáporných čísel.
  - $3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141, \ldots$ je posloupnost postupných dekadických rozvojů π.
  - $1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$ je posloupnost určená vztahem $p_i = (-1)^i$, $i \geq 0$.
  - Pokud chceme stejnou posloupnost $1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$ zadat jako q_i, $i \geq 1$, tak ji určíme vzorcem $q_i = (-1)^{i-1}$.
- Posloupnost je *rostoucí* (či *klesající*), pokud $p_{n+1} > p_n$ $\left(p_{n+1} < p_n\right)$ pro všechna n.

Rekurentní definice posloupnosti

Slovem *rekurentní* označujeme takové definice (či popisy), které se v jistých bodech odvolávají samy na sebe.

(Už jste se setkali s „rekurzí“ při programování? A víte, co znamená?) □

Ukázky **rekurentních vztahů**:

- Zadáme-li posloupnost p_n vztahy $p_0 = 1$ a $p_n = 2p_{n-1}$ pro $n > 0$, pak platí $p_n = 2^n$ pro všechna n. □
- Obdobně můžeme zadat posloupnost q_n vztahy $q_1 = 1$ a $q_n = q_{n-1} + n$ pro $n > 1$. Potom platí $q_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ pro všechna n.
  Uměli byste toto dokázat indukcí? □
- Známá Fibonacciho posloupnost je zadaná vztahy $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$.

Příklad 3.11. *Posloupnost f je zadaná rekurentní definicí*

$$f(0) = 3 \quad \text{a} \quad f(n+1) = 2 \cdot f(n) + 1$$

pro všechna přirozená n. Určete hodnotu $f(n)$ vzorcem v závislosti na n. □

Řešení: V první fázi řešení takového příkladu musíme nějak „uhodnout“ hledaný vzorec pro $f(n)$. Jak? Zkusíme vypočítat několik prvních hodnot a uvidíme...

$$\begin{aligned}
f(1) &= 2 \cdot f(0) + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\
f(2) &= 2 \cdot f(1) + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \\
f(3) &= 2 \cdot f(2) + 1 = 2 \cdot 15 + 1 = 31 \\
f(4) &= 2 \cdot f(3) + 1 = 2 \cdot 31 + 1 = 63 \square
\end{aligned}$$

Nepřipomínají nám tato čísla něco? Co třeba posloupnost $8-1$, $16-1$, $32-1$, $64-1\ldots$? Bystrému čtenáři se již asi podařilo uhodnout, že půjde o mocniny dvou snížené o 1. Přesněji, $\boldsymbol{f(n) = 2^{n+2} - 1}$. □

Ve druhé nesmíme ale zapomenout správnost našeho „věštění“ dokázat, nejlépe matematickou indukcí podle n. □