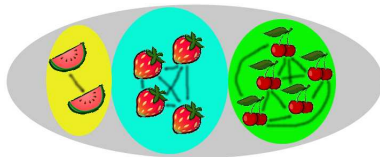


4 Relace a funkce, Ekvivalence

Nyní si podrobně rozebereme matematický aparát relací a funkcí, kterým se v jejich abstraktní podobě moc pozornosti v dřívější výuce nevěnuje (na rozdíl od velmi naivního pohledu na množiny a na „funkce“ jako $x + 1$ či $\sin x$).



Přitom na pojem relace velmi brzo narazí každý informatik při studiu dat a databází. Mimo to se nejčastěji setkáte s binárními relacemi; například vždy, když rozdělujete objekty podle „shodných“ znaků (relace *ekvivalence*), nebo když objekty mezi sebou „srovnáváte“ (relace *uspořádání*).

Stručný přehled lekce

- * Co je relace a funkce. Reprezentace relací tabulkou a grafem.
- * Základní vlastnosti binárních relací.
- * Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.

4.1 Relace a funkce nad množinami

Vedle množin dalším důležitým základním „datovým typem“ matematiky jsou relace, kterým vzhledem k jejich rozsáhlému použití v informatice věnujeme významnou pozornost v této i dvou příštích lekcích.

Definice 4.1. Relace mezi množinami A_1, \dots, A_k , pro $k \in \mathbb{N}$, je **libovolná** podmnožina kartézského součinu

$$R \subseteq A_1 \times \dots \times A_k. \square$$

Pokud $A_1 = \dots = A_k = A$, hovoříme o **k -ární relaci na A** . \square

Příklady relací.

- $\{(1, a), (2, a)\}$ je relace mezi $\{1, 2, 3\}$ a $\{a, b\}$.
- $\{(i, 2 \cdot i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ je binární relace na \mathbb{N} . \square
- $\{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ je ternární relace na \mathbb{N} .
- $\{3 \cdot i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je unární relace na \mathbb{N} . \square
- Jaký význam vlastně mají unární a nulární relace na A ?

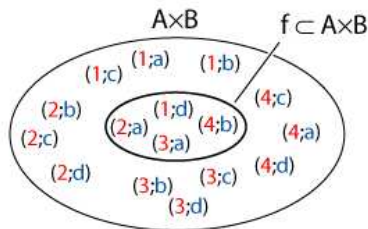
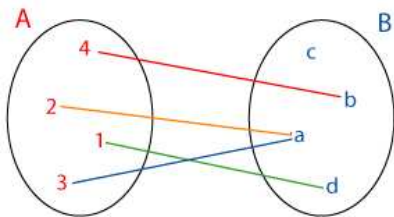
Funkce mezi množinami

Definice 4.2. (Totální) funkce z množiny A do množiny B

je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje **právě jedno** $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$. \square

Množina A se nazývá **definiční obor** a množina B **obor hodnot** funkce f .

Neformálně řečeno, ve funkci f je každé „vstupní“ hodnotě x přiřazena **jednoznačně** „výstupní“ hodnota y . (V obecné relaci počty „přiřazených“ dvojic neomezujeme. . .)



\square

Značení: Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$.

Zápis $f : A \rightarrow B$ říká, že f je funkce s def. oborem A a oborem hodnot B . □

Funkcím se také říká *zobrazení*.

Příklady funkcí.

- Definujeme funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem $f(x) = x + 8$.
Pak $f = \{(x, x + 8) \mid x \in \mathbb{N}\}$. □
- Definujeme funkci $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem $plus(i, j) = i + j$.
Pak $plus = \{(i, j, i + j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$.

Definice: Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ **nejvýše jedno** $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici **parciální funkce** z A do B . \square

V parciální funkci p nemusí být pro některé „vstupní“ hodnoty x funkční hodnota definována.

Pro **nedefinovanou** hodnotu používáme znak \perp . \square

Další příklady parciálních funkcí.

- Definujeme parciální funkci $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ předpisem

$$f(x) = \begin{cases} 3 + x & \text{jestliže } x \geq 0, \\ \perp & \text{jinak.} \end{cases}$$

Tj. $f = \{(x, 3 + x) \mid x \in \mathbb{N}\}$. \square

- Také funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ daná běžným analytickým předpisem

$$f(x) = \sqrt{x}$$

je jen parciální – není definována pro $x < 0$. \square

- Co je relace, přiřazující lidem v ČR jejich rodná čísla?

4.2 Repräsentace konečných relací

Příklad 4.3. *Tabulky relační databáze.*

Definujme následující množiny („elementární typy“)

- $ZNAK = \{a, \dots, z, A, \dots, Z, \text{mezera}\}$,
- $CISLICE = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. □

Dále definujeme tyto množiny („odvozené typy“)

- $JMENO = ZNAK^{15}$, $PRIJMENI = ZNAK^{20}$,
- $VEK = CISLICE^3$,
- $ZAMESTNANEC \sim JMENO \times PRIJMENI \times VEK$. □

Relaci „typu“ $ZAMESTNANEC$ pak lze reprezentovat tabulkou:

JMENO	PRIJMENI	VEK
Jan	Novák	42
Petr	Vichr	28
Pavel	Zíma	26
Stanislav	Novotný	52

 □

Poznámka: *Relační databáze* je konečná množina tabulek. *Schéma databáze* je (zjednodušeně řečeno) množina „typů“ jednotlivých tabulek.

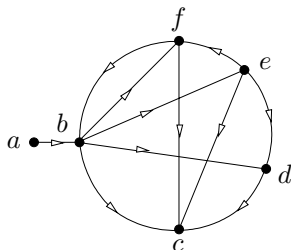
Reprezentace binárních relací na množině

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně znázornit jejím *grafem*:

- Prvky M znázorníme jako body v rovině.
- Prvek $(a, b) \in R$ znázorníme jako *orientovanou hranu* („šipku“) z a do b .
Je-li $a = b$, pak je touto hranou „smyčka“ na a . □

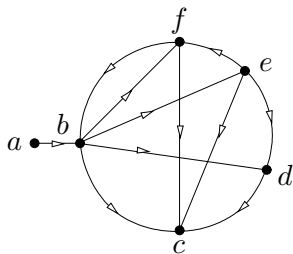
Pozor, nejedná se o „grafy funkcí“ známé z matematické analýzy.

Například mějme $M = \{a, b, c, d, e, f\}$ a $R = \{(a, b), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (d, c), (e, c), (f, c), (e, d), (e, f), (f, b)\}$, pak:



V případě, že R je nekonečná nebo „velká“, může být reprezentace R jejím grafem nepraktická (záleží pak na míře „pravidelnosti“ R).

Značení: Binární relaci $R \subseteq M \times M$ lze jednoznačně zapsat také pomocí *tabulky* relace – matice typu $M \times M$ s hodnotami z $\{0, 1\}$.



→

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3 Vlastnosti binárních relací

Definice 4.4. Necht' $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

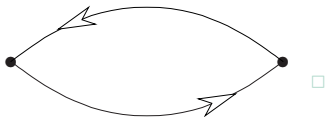
- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;



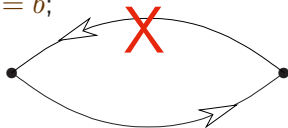
- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;



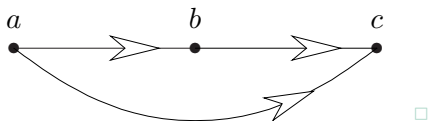
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;



- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



Následují dva základní typy binárních relací; kde R je

- relace *ekvivalence*, právě když je R reflexivní, symetrická a tranzitivní; □
- *částečné uspořádání*, právě když je R reflexivní, antisymetrická a tranzitivní (často říkáme jen *uspořádání*). □

Poznámka: Pozor, může být relace *symetrická i antisymetrická zároveň*? □ Ano!



Příklad 4.5. Několik příkladů relací definovaných v přirozeném jazyce.

Bud' M množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

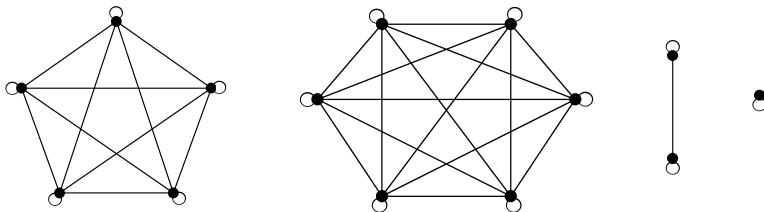
- $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když výška x a y se neliší více jak o 2 mm; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má jinou výšku než y (dejme tomu na celé mm); □
- $(x, y) \in R$ právě když x je zamilován(a) do y . □

Příklad 4.6. Jaké vlastnosti mají následující relace?

- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x dělí y . □ (Částečné uspořádání, ale ne každá dvě čísla jsou porovnatelná.)
- Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definovaná takto $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejný zbytek po dělení číslem 5. □ (Ekvivalence.)
- Necht' $F = \{f \mid f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}\}$ je množina funkcí. Bud' $R \subseteq F \times F$ definovaná takto $(f, g) \in R$ právě když $f(x) < g(x)$ pro všechna x . □ (Antisymetrická a tranzitivní, ale ne reflexivní – není uspořádání.) □

4.4 Relace ekvivalence

- Relace $R \subseteq M \times M$ je *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** je tedy třeba ověřit k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalence. □
- Jak vypadá **graf relace ekvivalence**? □



- Neformálně řečeno: ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejné“.

Bud' M množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované takto

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y ; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů; □
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku nebo stejnou barvu vlasů. □
(Tato relace obecně **není ekvivalence**! Proč?)

Příklad 4.7. Bud' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ binární relace definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když $|x - y|$ je dělitelné třemi.

V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? □ Dávají stejný zbytek po dělení třemi. □

Příklad 4.8. Bud' R binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když x i y sedí v první lavici. □

Proč se v tomto případě **nejedná** o relaci ekvivalence? □

Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) □

4.5 Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 4.9. Rozklad množiny. Necht' M je množina.

Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek \mathcal{N} je **neprázdná** podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$. \square

Prvkům \mathcal{N} se také říká *třídy rozkladu*.

- Bud' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M . \square
- Necht' $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$,
 $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel \mathbb{N} podle zbytkových tříd. \square
- Každý rozklad \mathcal{N} na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M .

Věta 4.10. *Bud' M množina a \mathcal{N} rozklad na M . Necht' $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto*

$(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$ právě když existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$.

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je **ekvivalence** na M . \square

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je **reflexivní, symetrická a tranzitivní** (Def. 4.4). \square

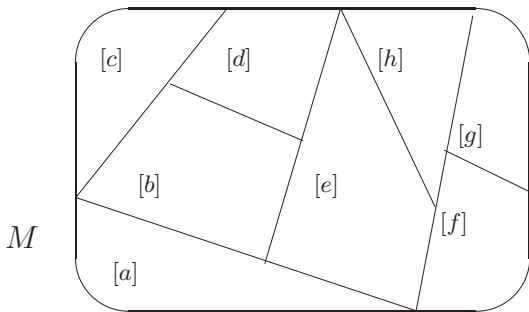
- Reflexivita: Bud' $x \in M$ libovolné. Jelikož \mathcal{N} je rozklad na M , musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 4.9). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. \square
- Symetrie: Necht' $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. \square
- Tranzitivita: Necht' $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 4.9 platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$. \square

Každá ekvivalence R na M jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M .

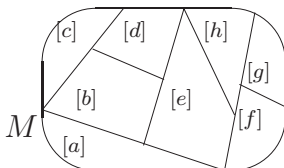
Věta 4.11. *Bud' M množina a R ekvivalence na M . Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M , který značíme M/R . \square



Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 4.9.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$. \square
- Necht' $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. \square
 Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). \square Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:
 - * „ $[x] \subseteq [y]$ “: Necht' $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$. \square
 - * „ $[y] \subseteq [x]$ “: Necht' $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$. \square
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. \square