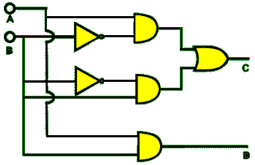
7 Jemný úvod do Logiky

Základem přesného matematického vyjadřování je správné používání (matematické) logiky a logických úsudků. Logika jako filozofická disciplína se intenzivně vyvíjí už od dob antiky, avšak ke skutečnému rozmachu logiky coby součásti matematiky došlo až začátkem 20. století.



Dnes se samozřejmě základní logický kalkulus používá nejen v matematice, ale „stojí“ na něm veškeré logické obvody a počítače.

Stručný přehled lekce

* Výroky v přirozené mluvě a formální výroková logika.
* Mechanický postup negace výrokových formulí.
* Neformální zmínka o predikátové logice (a kvantifikátorech).

7.1 Výroky v „přirozené“ podobě

Definice: V přirozené mluvě za *výrok* považujeme (každé) tvrzení, o kterém má smysl prohlásit, že je buď pravdivé nebo nepravdivé. □

Několik příkladů, které z nich jsou výroky?

- Dnes už v Brně pršelo. □
- Předmět FI: IB000 se vyučuje v prvním ročníku. □
- Platí $2 + 3 = 6$. □
- To je bez problémů. (Co?) □
- Platí $x > 3$. □
- Pro každé celé číslo x platí, že $x > 3$. □

Všimněte si, že pravdivost výroku by mělo být možné rozhodnout bez skrytých souvislostí (kontextu), a proto čtvrtý a pátý příklad za výroky nepovažujeme.

Fakt: Z jednoduchých výroků můžeme vytvářet výroky složitější pomocí tzv. *logických spojek*.

Několik dalších příkladů.

- Kateřina přijela ve 12:00 a šli jsme spolu do kina.□
- Množina $\{a, b\}$ má více než jeden prvek a není nekonečná.□
- Jestliže má Karel přes 90 kilo váhy, nepojedu s ním výtahem.□
- Jestliže má tato kráva 10 nohou, mají všechny domy modrou střechu.□

Zastavme se na chvíli nad posledním výrokem. Co nám říká? Je pravdivý? □Skutečně mají všechny domy modrou střechu a před námi stojí kráva s 10 nohama?

Schopnost porozumět takovýmto větám je součást lidského způsobu uvažování a z tohoto hlediska nemá přímou souvislost s matematikou (je to „přirozená logika“).□

Formální (matematická) logika pak definuje jazyk matematiky a odstraňuje nejednoznačnosti přirozeného jazyka.

7.2 (Formální) výroková logika

Definice 7.1. Syntaxe výrokové logiky.
Buď $\mathcal{AT} = \{A, B, C, \dots\}$ spočetně nekonečná množina *výrokových proměnných* (tzv. atomů).

Množina *výrokových formulí* Φ je definována induktivně následujícími pravidly:

(1) $\mathcal{AT} \subseteq \Phi$. □

(2) Jestliže $\varphi, \psi \in \Phi$, pak také $\neg(\varphi) \in \Phi$ a $(\varphi) \Rightarrow (\psi) \in \Phi$. □

(3) Každý prvek Φ vznikne konečně mnoha aplikacemi pravidel (1) a (2).□

Značení: Symbol $\neg$ je zván *negací* a $\Rightarrow$ je nazýván *implikací*.

Příklady několika správně utvořených formulí:

$$A, \quad (A) \Rightarrow (B), \quad ((A) \Rightarrow (\neg(B))) \Rightarrow ((\neg(B)) \Rightarrow (C))$$ □

A také příklady několika ne zcela správně utvořených formulí:

$$A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow B \Rightarrow C, \quad \neg A \Rightarrow B$$

Konvence 7.2. Pro zvýšení čitelnosti budeme závorky vynechávat, pokud to nepovede k nejednoznačnostem za předpokladu, že negace $\neg$ má „vyšší prioritu“ než $\Rightarrow$. (Touto úmluvou se nemění množina Φ; mění se jen způsob reprezentace jejích prvků.) $\Box$

Dále si zavedeme, že

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce*) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$,$\Box$
* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce*) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$,$\Box$
* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$.$\Box$

Například formule $\big(\neg((A) \Rightarrow (B))\big) \Rightarrow \big((\neg(B)) \Rightarrow (C)\big)$ se dá s naší konvencí zapsat jako

$$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C\,.$$

Definice 7.3. Sémantika výrokové logiky.
Valuace (ohodnocení) je funkce $\nu : \mathcal{AT} \to \{true, false\}$. Pro každou valuaci ν definujeme funkci $\mathcal{S}_\nu : \Phi \to \{true, false\}$ (*vyhodnocení*) induktivně takto:

- $\mathcal{S}_\nu(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in \mathcal{AT}$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) = \begin{cases} true & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = false; \\ false & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} false & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = true \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = false; \\ true & \text{jinak.} \end{cases}$

Tvrzení 7.4. *Důsledkem této definice je následovné:*

- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \vee \psi) = true$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ nebo $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \wedge \psi) = true$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = true$ právě když platí jedna z následujících podmínek
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = true$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = true$,
  - $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = false$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = false$.

Poznámka: Tento předpis podává nejen definici funkce $\mathcal{S}_\nu$, ale také návod na to, jak ji pro daný argument vypočítat.

Pravdivostní hodnoty

V praxi často vyhodnocení $\mathcal{S}_\nu$ logické výrokové formule zapisujeme do tzv. *pravdivostní tabulky*. Tato tabulka typicky má sloupce pro jednotlivé proměnné, případné „meziformule“ (pomůcka pro snažší vyplnění) a výslednou formuli. Řádků je 2^p (počet valuací), kde p je počet použitých proměnných. Místo $true, false$ píšeme $1, 0$.

Pro naše účely postačí uvést pravdivostní tabulku instruktážním příkladem. □

Příklad 7.5. *Jaká je pravdivostní tabulka pro formuli* $(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$*?*

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

□

Definice: Formule $\varphi \in \Phi$ je *splnitelná*, pokud pro některou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = \mathit{true}$. □

Formule $\varphi \in \Phi$ je vždy pravdivá, neboli výroková *tautologie*, psáno $\models \varphi$, pokud pro každou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = \mathit{true}$. □

Řekneme, že dvě formule $\varphi, \psi \in \Phi$ jsou *ekvivalentní*, právě když $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$. □

Tvrzení 7.6. *Několik užitečných tautologií:*

- $\models A \vee \neg A$ □
- $\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$ □
- $\models (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ □
- $\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ □
- $\models (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

Kde jsme se s užitím takových tautologií už setkali?

7.3 Jak správně „znegovat formuli“?

Přesný význam formulí se zanořenými negacemi je někdy obtížné zjistit (podobně jako v běžné řeči).□

„Není pravda, že nemohu neříct, že není pravda, že tě nemám nerad.“ □

Výrokové formule se proto obvykle prezentují v tzv. normálním tvaru, kde se negace vyskytují pouze u výrokových proměnných, formálně:□

Definice: Formule $\varphi \in \Phi$ je v *normálním tvaru*, pokud se v ní operátor negace aplikuje pouze na výrokové proměnné.

Například, pokud přijmeme pravidlo „dvojí negace“ ($\neg\neg A \Leftrightarrow A$), tak výše napsanou větu si převedeme na lépe srozumitelný tvar:

„Nemusím říct, že tě mám nerad.“ □

Tvrzení 7.7. *Každou výrokou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k* $\Rightarrow$ *povolíme i užívání odvozených spojek* $\wedge$ *a* $\vee$. □

- Pro ilustraci k $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \wedge \neg B$,
- k $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Normální tvar (formální postup)

„Znegováním formule φ“ se obvykle myslí převod $\neg\varphi$ do normálního tvaru. □

Metoda 7.8. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Definujeme funktory $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ pro náš převod induktivními předpisy

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\mathcal{F}(A) & = & A & \mathcal{G}(A) & = & \neg A \\
\mathcal{F}(\neg\varphi) & = & \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & (\mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)) \vee (\mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi))
\end{array}
$$

Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím postupu 7.8 získáme:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) & = & \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = \square \\
\mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) & = \square \\
A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) & = \\
A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) & = & A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) & = \\
A \wedge (B \vee (C \wedge A)) \square & & &
\end{array}
$$

Uvedené formální předpisy takto vyjadřují „intuitivní postup negace“ v matematicky přesném tvaru. Důkaz tohoto tvrzení je zároveň velmi hezkou ukázkou použití strukturální matematické indukce.

Věta 7.9. *Pro libovolnou výrokovou formuli φ platí, že*

a) $\mathcal{F}(\varphi)$ je jí ekvivalentní formule v normálním tvaru

b) a $\mathcal{G}(\varphi)$ je formule v normálním tvaru ekvivalentní negaci $\neg\varphi$. □

Důkaz povedeme tzv. „indukcí ke struktuře formule“, tedy indukci povedeme podle „délky“ ℓ – počtu aplikací induktivních pravidel (Definice 7.1) při sestavování formule φ. □

- Báze indukce ($\ell = 0$): Pro všechny atomy, tj. výrokové proměnné, zřejmě platí, že $\mathcal{F}(A) = A$ je ekvivalentní A a $\mathcal{G}(A) = \neg A$ je ekvivalentní $\neg A$. □
- V indukčním kroku předpokládejme, že a) i b) platí pro všechny formule φ délky nejvýše ℓ. Vezmeme si formuli ψ délky $\ell+1$, která je utvořená jedním z následujících způsobů:

* $\psi \equiv \neg\varphi$ ($\equiv$ je „definiční rovnítko“ pro formule).
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi) = \mathcal{G}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{G}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní $\neg\varphi = \psi$. $\Box$
  Obdobně pro funktor $\mathcal{G}$ vyjádříme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi) = \mathcal{F}(\varphi)$. Podle indukčního předpokladu pak je $\mathcal{F}(\varphi)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ a to je dále ekvivalentní $\neg\neg\varphi = \neg\psi$ podle Tvrzení 7.6. $\Box$

* $\psi \equiv (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$.
  Podle výše uvedeného induktivního předpisu je $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$. Podle indukčního předpokladu jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ i $\mathcal{F}(\varphi_2)$ formule v normálním tvaru ekvivalentní φ_1 a φ_2. Potom i $\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je v normálním tvaru dle definice a podle sémantiky $\Rightarrow$ je ta ekvivalentní formuli $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$. $\Box$
  Obdobně rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$. Jelikož $\wedge$ je pro nás jen zkratka, výraz dále rozepíšeme $\mathcal{G}(\psi) = \neg(\mathcal{F}(\varphi_1) \Rightarrow \neg\mathcal{G}(\varphi_2))$. Podle indukčního předpokladu (a dvojí negace) jsou $\mathcal{F}(\varphi_1)$ a $\neg\mathcal{G}(\varphi_2)$ po řadě ekvivalentní formulím φ_1 a φ_2. Tudíž nakonec odvodíme, že $\mathcal{G}(\psi)$ je ekvivalentní negaci formule $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, což jsme zde měli dokázat.

* $\psi \equiv (\varphi_1 \vee \varphi_2)$.
  Zde si musíme opět uvědomit, že spojka $\vee$ je pro nás jen zkratka, a přepsat $\psi \equiv (\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$. Potom podle předchozích dokázaných případů víme, že $\mathcal{F}(\psi) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \Rightarrow \mathcal{F}(\varphi_2)$ je ekvivalentní formuli $(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \psi$, což bylo třeba dokázat. Stejně tak $\mathcal{G}(\psi) = \mathcal{G}(\neg\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2) = \mathcal{F}(\neg\varphi_1) \wedge \mathcal{G}(\varphi_2)$ je podle předchozích případů důkazu ekvivalentní $(\neg\varphi_1 \wedge \neg\varphi_2) = \neg\psi$. □
* $\psi \equiv (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$ a $\psi \equiv (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ už dokončíme analogicky.

□

7.4 Predikátová logika, kvantifikace

- *Predikátová logika* je obecnější než logika výroková; každá formule výrokové logiky je i formulí predikátové logiky, ale ne obráceně.□
- Predikátová logika pracuje s *predikáty*. Predikáty jsou „parametrizované výroky“, které jsou buď pravdivé nebo nepravdivé pro každou konkrétní volbu parametrů. □Výrokové proměnné lze chápat jako predikáty bez parametrů.□

Pro neformální přiblížení si uvedeme několik ukázek predikátů:

* $x > 3$ (parameterem je zde x),□
* R je ekvivalence na M (parametr R),□
* čísla x a y jsou nesoudělná (parametry x, y),
* obecně psáno $P(x, y)$.□

Definice 7.10. Syntaxe i sémantika predikátové logiky.
Z predikátů lze vytvářet *predikátové formule* pomocí už známých (viz Definice 7.1) výrokových spojek a následujících tzv. *kvantifikátorů*:

- $\forall x \,.\, \varphi$ „pro každou volbu parametru x platí formule φ“,
- $\exists x \,.\, \varphi$ „existuje alespoň jedna volba parametru x, pro kterou platí φ“.

Fakt: Je-li každá proměnná v dané formuli kvantifikovaná (tj. formule je *uzavřená*), pak je celá formule buď pravdivá nebo nepravdivá.□

Konvence 7.11. Pro lepší srozumitelnost zápisu formulí predikátové logiky se domluvíme na následujícím.

* „Neuzavřené“ proměnné vyskytující se v predikátech ve formuli φ někdy pro referenci vypisujeme jako „parametry“ samotné formule $\varphi(x, y, \dots)$.□
* Poukud není z kontextu jasné, co lze za daný parametr dosazovat, užívá se notace $\forall x \in M \,.\, \varphi$ a $\exists x \in M \,.\, \varphi$. (Platí, jen pokud je kvantifikovaný parametr prvkem nějaké fixní množiny!). □
* Tečka za symbolem kvantifikátoru se někdy vynechává (při vhodném uzávorkování formule), nebo se používá symbol „ : “.□
* Místo $\forall x_1 \,.\, \forall x_2 \,.\, \cdots \forall x_n \,.\, \varphi$ se někdy krátce píše $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n(\varphi)$. Podobně u existenčního kvantifikátoru $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n(\varphi)$.

Příklad 7.12. *Ukažme si vyjádření následujících slovních výroků v predikátové logice:*

- Každé prvočíslo větší než 2 je liché,

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\ \ (Pr(n) \wedge n{>}2) \ \Rightarrow\ Li(n). \ \square$$

- Každé číslo $n > 1$, které není prvočíslem, je dělitelné nějakým číslem y kde $n \neq y$ a $y > 1$,

$$\forall n \in \mathbb{N} \,.\ \ \big(n > 1 \wedge \neg Pr(n)\big) \Rightarrow\ \exists y \big(y|\, n \wedge n{\neq}y \wedge y{>}1\big). \ \square$$

- Jsou-li R a S ekvivalence na M, je také $R \cup S$ ekvivalence na M.
  Zde například můžeme mít dva pohledy na toto tvrzení – v jednom bereme množinu M za pevnou

$$\forall R, S \ :\ (Eq_M(R) \wedge Eq_M(S)) \ \Rightarrow\ Eq_M(R{\cup}S),$$

  kdežto ve druhém je i množina M parametrem

$$\forall M \ \forall R, S \ :\ (Eq(M, R) \wedge Eq(M, S)) \ \Rightarrow\ Eq(M, R{\cup}S).$$

$\square$

Jak „negovat“ formule predikátové logiky?

Metoda 7.13. Převod predikátové formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Dřívější Metodu 7.8 rozšíříme o následující indukční pravidla:

$$
\begin{array}{lclclcl}
\mathcal{F}(P(x_1,\dots,x_n)) & = & P(x_1,\dots,x_n) & \qquad & \mathcal{G}(P(x_1,\dots,x_n)) & = & \neg P(x_1,\dots,x_n) \\
\mathcal{F}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & & \mathcal{G}(\forall x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \exists x\,.\,\mathcal{F}(\varphi) & & \mathcal{G}(\exists x\,.\,\varphi) & = & \forall x\,.\,\mathcal{G}(\varphi)\Box
\end{array}
$$

Uvažme například formuli

$$\neg(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\land Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S))\,.$$

Pak

$$
\begin{array}{lc}
\mathcal{F}(\neg(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\land Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S))) & = \\
\Box\mathcal{G}(\forall M\ \forall R,S\ :\ (Eq(M,R)\land Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S)) & = \\
\Box\exists M\ \exists R,S\ :\ \mathcal{G}((Eq(M,R)\land Eq(M,S))\ \Rightarrow\ Eq(M,R\cup S)) & = \\
\exists M\ \exists R,S\ :\ (Eq(M,R)\ \land\ Eq(M,S)\ \land\ \neg Eq(M,R\cup S))\,. &
\end{array}
$$