Dokažte, že funkce `fact x` počítá faktoriál celého nezáporného čísla x!

```
fact 0 = 1
fact x = x * fact (x-1)
```

Důkaz povedeme indukcí vzhledem k hodnotě *x*.

I: Báze indukce

Ukážeme, že tvrzení platí pro nejmenší možný argument $x = 0$:

`fact 0` = 0!

L: `fact 0 ~>` 1 -- levá strana rovnice

P: 0! = 1, což platí. -- pravá strana rovnice

II: Indukční krok

Nejprve musíme formulovat indukční předpoklad. Budeme předpokládat, že funkce `fact x` počítá faktoriál čísla x pro libovolné číslo $x = k$:

Indukční předpoklad: `fact k` = k!

Za pomoci indukčního předpokladu ukážeme, že funkce je korektní pro číslo o jedna větší, než které je použito v indukčním předpokladu $x = k + 1$:

`fact (k+1)` = (k+1)!

Zbývá zjistit, zda je na obou stranách opravdu stejná hodnota:

L: `fact (k+1) ~> (k+1) * fact k` $\xrightarrow{\text{IP}}$ (k+1) * k! = (k+1)!

P: (k+1)! za použití indukčního předpokladu

Levá strana je rovna pravé => rovnost platí => dokázali jsme, že funkce je korektní. □

Pozn.: Intuitivně můžeme indukci chápat tak, že platnost indukčního předpokladu lze vždy dokázat pomocí indukčního kroku: korektnost `fact k` dokážeme s využitím předpokladu `fact (k-1)` = (k - 1)!. Tento předpoklad můžeme opět dokázat pomocí předpokladu `fact (k-2)` = (k - 2)!. Takto můžeme pokračovat, až po konečném počtu kroků dokážeme korektnost `fact 1` = 1! za předpokladu, že `fact 0` = 0!, což máme přímo řečeno v bázi.

Dokažte, že funkce `length m` vrací délku seznamu *m*.

```
length [] = 0
length (_:s) = 1 + length s
```

Důkaz povedeme indukcí vzhledem k *délce seznamu m*.

<u>I: Báze indukce</u>

Ukážeme, že tvrzení platí pro nejkratší možný seznam <u>*m* = []</u>:

`length []` = 0,

L: **`length [] ~>`** 0

P: 0, což platí.

<u>II: Indukční krok</u>

Nejprve musíme formulovat indukční předpoklad. Budeme předpokládat, že funkce **`length m`** počítá délku seznamu *m*, <u>*m* = *s*</u>:

Indukční předpoklad: $\boxed{\texttt{length s} = n}$, kde *n* je *délka seznamu s*.

Za pomoci indukčního předpokladu ukážeme, že funkce je korektní pro seznam o jeden prvek delší, než který je v indukčním předpokladu <u>*m* = (*x*:*s*)</u>, *délka m* = *n* + 1:

`length (x:s)` = 1 + *n*

Zbývá zjistit, zda je na obou stranách opravdu stejná hodnota:

L: **`length (x:s) ~> 1 + length s`** $\xrightarrow{\text{IP}}$ 1 + *n*
P: 1 + *n* za použití indukčního předpokladu

Levá strana je rovna pravé => rovnost platí => dokázali jsme, že funkce je korektní. □