

FORMÁLNÍ JAZYKY A AUTOMATY I
ŘEŠENÍ cvičení 1.

1. Všechny jazyky jsou podmnožinou jazyka L_1 . Dále platí:

$L_1 = L_6$: inkluze $L_6 \subseteq L_1$ je zřejmá. Ukážeme opačnou inkluzi, t.j. $L_1 \subseteq L_6$.

Zřejmě prázdné slovo je prvkem obou jazyků. Každé neprázdné slovo $w \in L_1$ může být nazíráno jako posloupnost, ve které se střídají skupiny symbolů a se skupinami symbolů b . Přesněji, slovo w můžeme zapsat jako $w = a^{i_1}b^{j_1} \dots a^{i_n}b^{j_n}$, kde $i_1 \geq 0$; $j_1, i_2, \dots, i_n > 0$; $j_n \geq 0$; $n \geq 1$ a $i_1 + j_n > 0$.

Předpokládejme, že $j_n > 0$, tzn. slovo w končí skupinou symbolů b (případ $j_n = 0$ se řeší analogicky). Indukcí vzhledem k n prokážeme, že $w \in \{a^*b\}^*$.

1°. $w = a^{i_1}b^{j_1} = a^{i_1}b \underbrace{a^0b^0b \dots a^0b}_{j_1-1}$. Proto $w \in \{a^*b\}^{j_1}$.

2°. Podle indukčního předpokladu tvrzení platí pro n . Dokážeme jej pro $n+1$. Slovo w obsahující $n+1$ skupin symbolů b můžeme napsat jako zřetězení slov v_1 a v_2 , kde $v_1 = a^{i_1}b^{j_1} \dots a^{i_n}b^{j_n}$ a $v_2 = a^{i_{n+1}}b^{j_{n+1}}$. Podle IP obě slova patří do $\{a^*b\}^*$, a proto slovo w patří do $\{a^*b\}^*$.

$L_2 \subset L_1$: slovo $aa \notin L_2$ ale $aa \in L_1$.

$L_3 \subset L_1$: slovo $baab \notin L_3$ ale $baab \in L_1$.

$L_4 \subset L_3$: Jestli $w \in L_4$, pak z definice operace zřetězení jazyků plyne existence slov v_1, v_2, v_3 takových, že $v_1 = a$, $v_2 = a^i$ a $v_3 = b^j$ ($i, j \geq 0$). Slova v_1v_2 a v_3 dokazují příslušnost slova w do L_3 . Inkluze je ostrá, protože $\varepsilon \notin L_4$.

$L_4 \subset L_5$: Podobně jako v předcházejícím případě; $v_1 \in \{a\}$ a $v_2v_3 \in \{a, b\}^*$. Inkluze je ostrá, protože slovo $ba \notin L_4$ ale $ba \in L_5$.

$L_5 \subset L_1$: slovo $bb \notin L_5$ ale $bb \in L_1$.

Všechny zbývající dvojice jsou nesrovnatelné.

2. a) $X = \{00\}^* \cdot \{1000, 0100, 0010, 0001, 00\} \cdot \{00\}^*$.

b) Označme $L = \{0, 1\}^*$. Pak

$$Y = (L\{000\}L \cup L\{111\}L)^c \cap [\{1\}L\{1\} \cup \{0\}L\{0\} \cup \{0\} \cup \{1\}].$$

3. Buď $w \in (L_1 \cup L_2) \cdot L_3$. \iff

$$w = u \cdot v, \text{ kde } v \in L_3 \text{ a } u \in L_1 \text{ anebo } u \in L_2. \iff$$

$$u \cdot v \in L_1 \cdot L_3 \text{ anebo } u \cdot v \in L_2 \cdot L_3 \iff$$

$$w \in (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3).$$

Pro $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{aa\}$ a $L_3 = \{a, aa\}$ rovnost b) neplatí.

4. Buď $w \in (L_1 \cdot L_2)^+ \cdot L_1$ \iff

$$w = uv, \text{ kde } v \in L_1 \text{ a } u \in (L_1 \cdot L_2)^+ \iff$$

$$w = uv, \text{ kde } v \in L_1 \text{ a } u = x_1y_1 \dots x_ny_n, \text{ kde } x_i \in L_1 \text{ a } y_i \in L_2 \text{ pro } i = 1, \dots, n. \iff$$

$$w = UV, \text{ kde } U = x_1 \in L_1 \text{ a } V = y_1x_2 \dots y_nv \in (L_2 \cdot L_1)^+ \iff$$

$$w \in L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1)^+.$$

Rovnost $(L_1 \cdot L_2)^0 \cdot L_1 = L_1 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_1)^0$ je zřejmá.

Pro $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ rovnost b) neplatí; slovo $ba \in (L_1 \cup L_2)^*$ ale $ba \notin L_1^*(L_1^* \cdot L_2)^*$

5. a) $h^{-1}(aabaabaa) = \{ababc, abccbc, ccbabc, ccbccbc\}$.

b) $h(L) = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3\#_b(w)\}$; w neobsahuje podřetězec bb .

c) $h^{-1}(L) = \{w \in \{a, c\}^* \mid \#_c(w) \text{ je sudý}\}$.