

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující jazyky nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = \{a\} \cdot (\{\varepsilon\} \cup \{a\})$$

$$L_2 = \{b\} \cup (\emptyset \cdot \{b\})$$

$$L_3 = (L_1 \cdot L_2^*) \cap L_1^*$$

Zjistěte, kolik slov obsahuje jazyk L_3 , a vypište je. Svou odpověď zdůvodněte.

Řešení: Jazyk L_3 obsahuje právě dvě slova, jsou to slova a a aa .

Zdůvodnění: Nejprve si přepíšeme jazyky L_1 a L_2 do čitelnější podoby:

$$L_1 = \{a\} \cdot (\{\varepsilon\} \cup \{a\}) = \{a\} \cdot \{\varepsilon, a\} = \{a, aa\}$$

$$L_2 = \{b\} \cup (\emptyset \cdot \{b\}) = \{b\} \cup \emptyset = \{b\}$$

Nyní je zřejmé, že jazyk $L_1 \cdot L_2^*$ obsahuje právě všechna slova, která začínají jedním nebo dvěma symboly a , za nimiž následuje libovolný počet symbolů b (včetně nulového počtu), formálně tedy $\{a, aa\} \cdot \{b\}^*$. Jazyk L_1^* pak obsahuje právě všechna slova, která jsou tvořena pouze symboly a (včetně prázdného slova), formálně $L_1^* = \{a\}^*$. Jsou pouze dvě slova, která patří do obou těchto jazyků, a to jsou právě a a aa . Proto platí:

$$L_3 = (L_1 \cdot L_2^*) \cap L_1^* = \{a, aa\}$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Necht' L je jazyk nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$ tvořený právě všemi slovy, která mají sudý počet písmen a a zároveň sudý počet písmen b . Zapište jazyk L pomocí jednoprvkových jazyků $\{a\}$ a $\{b\}$ s využitím operací sjednocení (\cup), zřetězení (\cdot), průniku (\cap) a iterace ($*$). Chcete-li použít jiné operace nebo jazyky, musíte je nejprve definovat pomocí výše uvedených operací a jazyků.

Bonusová varianta za **4 body**: Zapište jazyk L bez použití operace průniku.

Řešení: Pro zpřehlednění zápisu si nejprve definujeme následující pomocné jazyky. Jazyk L_1 bude obsahovat všechna slova se sudým počtem a a jazyk L_2 bude obsahovat všechna slova se sudým počtem b .

$$L_1 = (\{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\})^* \cdot \{b\}^*$$

$$L_2 = (\{a\}^* \cdot \{b\} \cdot \{a\}^* \cdot \{b\})^* \cdot \{a\}^*$$

Řešení pak můžeme snadno zapsat takto: $L = L_1 \cap L_2$.

Řešení bonusové varianty: Nejprve si definujeme následující pomocné jazyky:

$$L_1 = (\{a\} \cdot \{a\}) \cup (\{b\} \cdot \{b\})$$

$$L_2 = (\{a\} \cdot \{b\}) \cup (\{b\} \cdot \{a\})$$

Řešení pak můžeme zapsat například takto:

$$L = (L_1 \cup L_2 \cdot L_1^* \cdot L_2)^*$$

Vysvětlení: Slova, která mají sudý počet a i b , musí být nutně sudé délky. Každé takové slovo se tedy dá rozdělit na posloupnost dvojic písmen. Tyto dvojice jsou dvou typů – buď nemění paritu počtu a a b (to jsou dvojice aa a bb), nebo mění paritu počtu a i paritu počtu b (to jsou dvojice ab a ba). Dvojic prvního typu může být ve slově libovolný počet, dvojic druhého typu musí být nutně ve slově sudý počet. (Paritou míníme sudost/lichost počtu písmen.)