

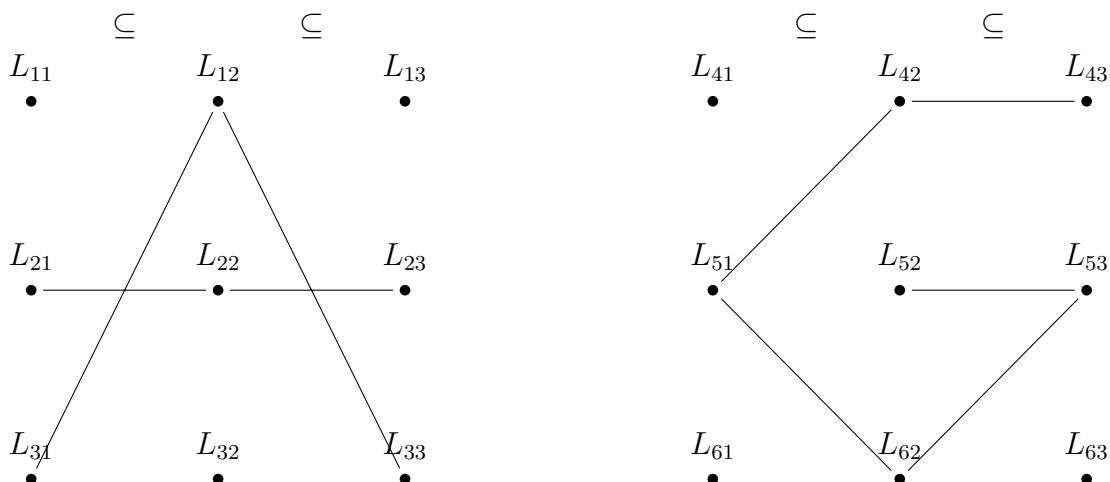
Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [3 body] Na obrázku máte 2 čtverce, v každém z nich 9 jazyků nad abecedou  $\{a, b\}$ . V sousedních sloupcích spojte čarou ty jazyky, mezi kterými je relace inkluze (tzn. levý jazyk je podmnožinou pravého jazyka anebo jsou si rovny). U jazyků, které se vám nepodaří s ničím spojit, stručně vysvětlete proč.

Poznámka: Zatímco v levém čtverci jsou konkrétní jazyky, v pravém jsou všechny jazyky odvozené od jazyka  $L$ , který není specifikován. Do pravého čtverce proto zaznačte inkluze, které platí obecně, tj. pro libovolnou volbu jazyka  $L \subseteq \{a, b\}^*$ . U jazyků z pravého čtverce, které nejsou s ničím spojeny, by proto mělo vysvětlení využívat protipříklady.



$$L_{11} = \{a, b\}^*$$

$$L_{21} = \{a\}$$

$$L_{31} = \{ab, abb\}$$

$$L_{12} = \{a\} \cdot \{b\}^+$$

$$L_{22} = \{a\}^+$$

$$L_{32} = \{b\}^+$$

$$L_{13} = \text{co-}\{a, b\}^*$$

$$L_{23} = \{a\}^*$$

$$L_{33} = \{a\}^+ \cdot \{b\}^+$$

$$L_{41} = L^R$$

$$L_{51} = L$$

$$L_{61} = (L^0 \cup \{a, b\})^+$$

$$L_{42} = L \cdot (L^R)^*$$

$$L_{52} = L^6$$

$$L_{62} = L \cup L^0$$

$$L_{43} = L \cup L \cdot (L^R)^+$$

$$L_{53} = L^*$$

$$L_{63} = \text{co-}L \cap L$$

Řešení: Relace inkluze je zakreslena v obrázku výše. Zdůvodnění s ničím nespojených jazyků jsou následující:

- $L_{11}$  je jazyk všech slov nad abecedou  $\{a, b\}^*$ . Obsahuje tedy i např. slovo  $ba$ , které nepatří do žádného z jazyků  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  a  $L_{32}$ .
- $L_{32}$  obsahuje např. slovo  $b$ , které nepatří do žádného z jazyků  $L_{13}$ ,  $L_{23}$  a  $L_{33}$ . Zároveň do  $L_{32}$  nepatří ani slovo  $a$ , ani slovo  $ab$ , není tedy nadmnožinou  $L_{11}$ ,  $L_{21}$  (kvůli  $a$ ) ani  $L_{31}$  (kvůli  $ab$ ).
- $L_{13}$  je prázdný jazyk. Jazyky  $L_{12}$ ,  $L_{22}$  a  $L_{32}$  jsou ale neprázdné, nemohou být proto jeho podmnožinou.
- $L_{41}$  je zrcadlový obraz jazyka  $L$ . Zvolíme-li např.  $L = \{ab\}$ , pak  $L_{41} = \{ba\}$ . Slovo  $ba$  pak ovšem neobsahuje žádný z jazyků  $L_{42} = \{ab\}.\{ba\}^*$ ,  $L_{52} = \{ababababab\}$  a  $L_{62} = \{\varepsilon, ab\}$ .
- $L_{61}$  je (pro libovolnou volbu jazyka  $L$ ) jazyk všech slov. Stačí tedy zvolit např.  $L = \emptyset$ , pak zřejmě  $L_{42} = \emptyset$ ,  $L_{52} = \emptyset$ ,  $L_{62} = \{\varepsilon\}$ . Žádný z těchto jazyků zřejmě není nadmnožinou jazyka všech slov.
- $L_{63}$  je (pro libovolnou volbu jazyka  $L$ ) prázdný jazyk. Stačí za  $L$  zvolit libovolný neprázdný jazyk, pak zřejmě i jazyky  $L_{42}$ ,  $L_{52}$  a  $L_{62}$  jsou neprázdné a nejsou tedy podmnožinami prázdného jazyka.

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [3 body] Mějme jazyk  $L = \{ab, ba, aba\}$  nad abecedou  $\Sigma = \{a, b\}$ . Zjistěte, kolik slov má následující jazyk:

$$\text{co-}((\text{co-}L)^2)$$

Odpověď zdůvodněte.

*Řešení:* Jazyk  $\text{co-}((\text{co-}L)^2)$  má právě jedno slovo, a to  $aba$ . Ukážeme, že jazyk  $(\text{co-}L)^2$  obsahuje všechna slova ze  $\Sigma^*$  kromě slova  $aba$ . Nechť tedy  $w \in \Sigma^*$ . Máme následující čtyři případy:

- $w$  nepatří do  $L$ . Pak  $w$  patří do  $\text{co-}L$ . Protože rovněž  $\varepsilon$  patří do  $\text{co-}L$ , dohromady tedy  $w = w \cdot \varepsilon \in (\text{co-}L)^2$ .
- $w = ab$ . Slova  $a$  a  $b$  nepatří do  $L$ , patří proto do  $\text{co-}L$ . Potom  $w = a \cdot b \in (\text{co-}L)^2$ .
- $w = ba$ . Podobně jako v předchozím bodě  $w = b \cdot a \in (\text{co-}L)^2$ .
- $w = aba$ . Není žádná možnost, jak rozdělit  $w$  na dvě slova tak, aby obě byla v  $\text{co-}L$ . To se snadno ověří, neboť možná rozdělení jsou pouze čtyři ( $\varepsilon \cdot aba$ ,  $a \cdot ba$ ,  $ab \cdot a$ ,  $aba \cdot \varepsilon$ ). Proto  $w \notin (\text{co-}L)^2$ .

Ukázali jsme tedy, že jazyk  $(\text{co-}L)^2$  obsahuje všechna slova ze  $\Sigma^*$  kromě slova  $aba$ . Proto pro jeho doplněk platí  $\text{co-}((\text{co-}L)^2) = \{aba\}$ .