**IB102 – úkol 5 – řešení** **Odevzdání: 25. 10. 2010**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

**1. [2 body]** Najděte jazyky $L_1$, $L_2$, $L_3$ a $L_4$ takové, aby byly splněny následující podmínky:

(a) Jazyky $L_1$, $L_2$ jsou různé a platí $\sim_{L_1} = \sim_{L_2}$.

(b) Jazyky $L_3$, $L_4$ jsou různé, platí $\sim_{L_3} \neq \sim_{L_4}$ a zároveň existuje relace $\sim$ splňující podmínky Nerodovy věty pro oba tyto jazyky.
(*Tj. $\sim$ musí být relace pravé kongruence s konečným indexem taková, že $L_3$ je sjednocením některých tříd rozkladu podle $\sim$ a zároveň $L_4$ je sjednocením některých tříd rozkladu podle $\sim$.*)

Své řešení zdůvodněte, tj. zejména popište všechny zmíněné relace, např. tak, že popíšete jejich třídy rozkladu.

*Řešení* může vypadat například takto:

(a) $L_1 = \emptyset$, $L_2 = \Sigma^*$. Pak zřejmě $\sim_{L_1} = \sim_{L_2} = \Sigma^* \times \Sigma^*$.
*Poznámka*: Podobně jsme mohli zvolit libovolný jiný jazyk spolu s jeho komplementem. Platí totiž, že $\sim_L = \sim_{\text{co}-L}$. Možných řešení však existuje ještě víc, například jazyky $L_1 = \{w \mid |w| \bmod 3 = 0\}$ a $L_2 = \{w \mid |w| \bmod 3 \neq 2\}$ sice mají neprázdný průnik, ale platí $\sim_{L_1} = \sim_{L_2}$.

(b) $L_3 = \Sigma^*$, $L_4 = \{\varepsilon\}$. Pak $\sim_{L_3} = \Sigma^* \times \Sigma^*$, $\sim_{L_4} = \{(\varepsilon, \varepsilon)\} \cup \Sigma^+ \times \Sigma^+$. Formulováno pomocí tříd rozkladu, $\sim_{L_3}$ má pouze jednu třídu obsahující všechna slova a $\sim_{L_4}$ má dvě třídy, jedna obsahuje pouze $\varepsilon$, druhá všechna ostatní slova. Dále vezmeme $\sim = \sim_{L_4}$. To je zřejmě pravá kongruence s konečným indexem (2) a $L_3$ i $L_4$ jsou sjednocením některých tříd rozkladu podle $\sim$.

**IB102 – úkol 5 – řešení** **Odevzdání: 25. 10. 2010**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

**2.** [**2 body**] Mějme následující jazyk:

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ je binární zápis čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 1\}$$

přičemž za binární zápis čísla považujeme pouze takový zápis, který neobsahuje zbytečné levostranné nuly, tj. 0110 pro nás není binární zápis čísla, zatímco 110 je.

(a) Určete index $\sim_L$ a popište třídy rozkladu podle $\sim_L$.

(b) Popište relaci pravé kongruence $\sim$ s konečným indexem takovou, že $\sim \neq \sim_L$ a přitom $L$ je sjednocením některých tříd rozkladu podle $\sim$.

*Řešení*:

(a) Třídy rozkladu podle $\sim_L$ jsou následující:

1. $\{\varepsilon\}$
2. $\{0\} \cdot \{0,1\}^*$
3. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 0\}$
4. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 1\}$
5. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 2\}$

Index $\sim_L$ je tedy 5.

(b) Nechť $\sim$ je relace ekvivalence určená následujícími třídami rozkladu:

1. $\{\varepsilon\}$
2. $\{0\}$
3. $\{0\} \cdot \{0,1\}^+$
4. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 0\}$
5. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 1\}$
6. $\{w \in \{1\} \cdot \{0,1\}^* \mid w \text{ je binárním zápisem čísla } k \text{ takového, že } k \bmod 3 = 2\}$

Zřejmě platí, že $\sim$ je relací pravé kongruence s konečným indexem a $\sim \neq \sim_L$. $L$ se rovná třídě rozkladu označené číslem 5.