

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

Bonusový příklad [3 body] Mějme binární operaci \curlyvee , kterou lze intuitivně popsat tak, že $u \curlyvee v$ je množina všech slov, která vzniknou tak, že se symboly z u promíchají se symboly z v s tím, že se pořadí symbolů z u a symbolů z v zachová. Například $aba \curlyvee cd = \{abcd, abcad, acbad, cabad, abcda, acbda, cabda, acdba, cadba, cdaba\}$. Formálně se tato operace na slovech dá definovat takto:

$$u \curlyvee v = \{u_1v_1u_2v_2 \cdots u_kv_k \mid k \in \mathbb{N}, u = u_1u_2 \cdots u_k, v = v_1v_2 \cdots v_k, \forall i : u_i, v_i \in \Sigma^*\}$$

Tato operace se dá rozšířit i na jazyky, intuitivně je $L_1 \curlyvee L_2$ jazyk, který vznikne tak, že se operace \curlyvee aplikuje postupně na všechny dvojice slov z jazyků L_1 a L_2 a výsledné množiny se sjednotí. Například $\{ab, ba\} \curlyvee \{b, c\} = \{abb, bab, bba, abc, acb, cab, bac, bca, cba\}$. Formálně definujeme:

$$L_1 \curlyvee L_2 = \bigcup \{u \curlyvee v \mid u \in L_1, v \in L_2\}$$

Mějme dva nedeterministické konečné automaty A_1, A_2 . Popište konstrukci automatu A takového, že $L(A) = L(A_1) \curlyvee L(A_2)$.

Řešení: Idea řešení spočívá v konstrukci „asynchronního“ paralelního spojení dvou automatů. Na rozdíl od klasického synchronního paralelního spojení se automaty nepohybují zároveň, ale naopak každý zvlášť. Vždy jeden „táhne“ a druhý „stojí“.

Nechť tedy $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ a $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$. Nový automat bude $A = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_1, q_2), F_1 \times F_2)$, kde:

$$\delta((p_1, p_2), a) = \delta_1(p_1, a) \times \{p_2\} \cup \{p_1\} \times \delta_2(p_2, a)$$

Důkaz korektnosti této konstrukce ponecháváme čtenáři jako cvičení. (V zadání jsme jej ani nepožadovali.)

Pro jednoduchost jsme uvažovali, že oba původní automaty mají stejnou vstupní abecedu. Řešení by se dalo zobecnit i na případ, kdy automat A_1 má vstupní abecedu Σ_1 a automat A_2 má vstupní abecedu Σ_2 . Výsledný automat by pak měl vstupní abecedu $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Poznámka: V anglické literatuře se tato operace většinou nazývá „shuffle“ a označuje se symbolem \diamond . V zadání tohoto příkladu jsme schválně zvolili jiné značení, abychom zabránili možnosti dohledat řešení v literatuře, příp. na webu.