IB102 – úkol 7 – řešení **Odevzdání: 8. 11. 2010**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

---

1. [2 body] Rozhodněte, zda pro všechny jazyky L, K platí následující implikace. Svá rozhodnutí zdůvodněte.

(a) L^* je regulární $\implies$ L je regulární

(b) $(L \smallsetminus K)^R$ je regulární, K je regulární a $K \subseteq L$ $\implies$ L je regulární

Řešení:

(a) Neplatí. Uvažme například jazyk $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w = w^R\}$. Jazyk obsahuje slova a i b a proto platí $L^* = \{a,b\}^*$, což je regulární jazyk. Jazyk L ale není regulární, což by se dalo dokázat například pomocí Pumping lemmatu s volbou slova $a^n bba^n$.

(b) Platí. Víme, že regulární jazyky jsou uzavřeny na reverzi. Dostáváme tedy, že $L \smallsetminus K = ((L \smallsetminus K)^R)^R$ je regulární. Dále z inkluze $K \subseteq L$ plyne, že $L = K \cup (L \smallsetminus K)$. Jelikož regulární jazyky jsou uzavřené na sjednocení, jazyk L je také regulární.

IB102 – úkol 7 – řešení **Odevzdání: 8. 11. 2010**

Vypracoval: James Bond UČO: 007
Skupina: MI6

2. [**2 body**] Definujme $\mathcal{T}$ jako třídu všech jazyků, jejichž prefixová ekvivalence má index nejvýše 4. Platí tedy, že jazyk L patří do třídy $\mathcal{T}$ právě tehdy, když *index* $\sim_L \leq 4$.

Odpovězte na následující otázky a své odpovědi zdůvodněte.

(a) Je třída $\mathcal{T}$ uzavřená na sjednocení?

(b) Je třída $\mathcal{T}$ uzavřená na průnik?

(c) **BONUS** [**+1 bod**] Je třída $\mathcal{T}$ uzavřená na iteraci?

(d) **BONUS** [**+1 bod**] Je třída $\mathcal{T}$ uzavřená na pozitivní iteraci?

Řešení: Třída $\mathcal{T}$ není uzavřená na sjednocení ani na průnik. K důkazu stačí vzít jazyky $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 3 = 0\}$ a $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 4 = 0\}$. Snadno se nahlédne, že *index* $\sim_{L_1} = 3$ a *index* $\sim_{L_2} = 4$, tedy L_1, $L_2 \in \mathcal{T}$. Jejich sjednocení a průnik jsou:

$$L_1 \cup L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 3 = 0 \vee |w| \bmod 4 = 0\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 3 = 0 \wedge |w| \bmod 4 = 0\}$$

Snadno se ověří (např. paralelním synchronním spojením automatů pro L_1 a L_2 a následnou minimalizací), že minimální DFA pro tyto jazyky mají 12 stavů, tedy že *index* $\sim_{L_1 \cup L_2} = 12$ a *index* $\sim_{L_1 \cap L_2} = 12$. Odtud tedy plyne, že $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{T}$ a třída $\mathcal{T}$ není uzavřená na sjednocení ani na průnik.

Řešení bonusových otázek: Třída $\mathcal{T}$ není uzavřená na iteraci ani na pozitivní iteraci. Vezměme si následující jazyk:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \bmod 3 = 2\}$$

Zřejmě *index* $\sim_L = 3$. Iterace a pozitivní iterace tohoto jazyka jsou:

$$L^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma^2 \cup (\Sigma^4 \cdot \Sigma^*)$$
$$L^+ = \Sigma^2 \cup (\Sigma^4 \cdot \Sigma^*)$$

L^+ tedy obsahuje právě všechna slova délky 2 a délek od 4 výše, L^* obsahuje totéž, co L^+, a navíc ε. Snadno se ověří (opět např. sestrojením automatu a jeho minimalizací), že *index* $\sim_{L^*} = 5$ a rovněž *index* $\sim_{L^+} = 5$.

Poznámka: Všimněte si, že naše protipříklady fungují nezávisle na konkrétní abecedě Σ.