

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

1. [2 body] Mějme následující gramatiku:

$$G = (\{S', S, A, V, P, E, N, C, R\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \text{if}, \text{then}, ;, +\}, P, S'), \text{ kde}$$

$$P = \{ \begin{array}{l} S' \rightarrow S'; S \mid S, \\ S \rightarrow A \mid \text{if } C \text{ then } S, \\ A \rightarrow VPE, \\ V \rightarrow x \mid y, \\ P \rightarrow =, \\ E \rightarrow V \mid N \mid E + E, \\ N \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0N \mid 1N, \\ C \rightarrow ERE, \\ R \rightarrow = \mid < \mid > \}. \end{array}$$

Pro gramatiku  $G$  sestrojte syntaktický analyzátor metodou **shora dolů**. Analyzujte slovo **if  $x > 1$  then  $y = 10$** .

*Řešení:* Syntaktický analyzátor metodou shora dolů vypadá takto:

$$A_{td} = (\{q\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \text{if}, \text{then}, ;, +\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \text{if}, \text{then}, ;, +, S', S, A, V, P, E, N, C, R\}, \delta, q, S', \emptyset), \text{ kde}$$

$$\begin{array}{ll} \delta(q, \varepsilon, S') = \{(q, S'; S), (q, S)\} & \delta(q, x, x) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, A), (q, \text{if } C \text{ then } S)\} & \delta(q, y, y) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, VPE)\} & \delta(q, 1, 1) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, V) = \{(q, x), (q, y)\} & \delta(q, 0, 0) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, P) = \{(q, =)\} & \delta(q, <, <) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, V), (q, N), (q, E + E)\} & \delta(q, >, >) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, N) = \{(q, 0), (q, 1), (q, 0N), (q, 1N)\} & \delta(q, =, =) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, C) = \{(q, ERE)\} & \delta(q, \text{if}, \text{if}) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, \varepsilon, R) = \{(q, =), (q, <), (q, >)\} & \delta(q, \text{then}, \text{then}) = \{(q, \varepsilon)\} \\ \delta(q, ;, ;, ;) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, +, +) = \{(q, \varepsilon)\} \end{array}$$

Syntaktickou analýzou slova **if  $x > 1$  then  $y = 10$**  je pak následující výpočet:

$$\begin{aligned} (q, \text{if } x > 1 \text{ then } y = 10, S') & \stackrel{\varepsilon}{\mid} (q, \text{if } x > 1 \text{ then } y = 10, S) \\ & \stackrel{\varepsilon}{\mid} (q, \text{if } x > 1 \text{ then } y = 10, \text{if } C \text{ then } S) \\ & \stackrel{\text{if}}{\mid} (q, x > 1 \text{ then } y = 10, C \text{ then } S) \end{aligned}$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, x > 1 \text{ then } y = 10, ERE \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, x > 1 \text{ then } y = 10, VRE \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, x > 1 \text{ then } y = 10, xRE \text{ then } S)$$

$$\vdash^x (q, > 1 \text{ then } y = 10, RE \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, > 1 \text{ then } y = 10, > E \text{ then } S)$$

$$\vdash^{>} (q, 1 \text{ then } y = 10, E \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, 1 \text{ then } y = 10, N \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, 1 \text{ then } y = 10, 1 \text{ then } S)$$

$$\vdash^1 (q, \text{ then } y = 10, \text{ then } S)$$

$$\vdash^{\text{then}} (q, y = 10, S)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, y = 10, A)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, y = 10, VPE)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, y = 10, yPE)$$

$$\vdash^y (q, = 10, PE)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, = 10, = E)$$

$$\vdash^= (q, 10, E)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, 10, N)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, 10, 1N)$$

$$\vdash^1 (q, 0, N)$$

$$\vdash^{\varepsilon} (q, 0, 0)$$

$$\vdash^0 (q, \varepsilon, \varepsilon)$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

2. [2 body] Mějme následující gramatiku:

$$G = (\{S', S, A, V, P, E, N, C, R\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \mathbf{if}, \mathbf{then}, ;, +\}, P, S'), \text{ kde}$$

$$P = \{ \begin{array}{l} S' \rightarrow S'; S \mid S, \\ S \rightarrow A \mid \mathbf{if} C \mathbf{then} S, \\ A \rightarrow VPE, \\ V \rightarrow x \mid y, \\ P \rightarrow =, \\ E \rightarrow V \mid N \mid E + E, \\ N \rightarrow 0 \mid 1 \mid 0N \mid 1N, \\ C \rightarrow ERE, \\ R \rightarrow = \mid < \mid > \}. \end{array}$$

Pro gramatiku  $G$  sestrojte syntaktický analyzátor metodou **zdola nahoru**. Analyzujte slovo **if  $x > 1$  then  $y = 10$** .

*Řešení:* Syntaktický analyzátor metodou zdola nahoru vypadá takto:

$$A_{bu} = (\{q, r\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \mathbf{if}, \mathbf{then}, ;, +\}, \{x, y, 1, 0, <, >, =, \mathbf{if}, \mathbf{then}, ;, +, S', S, A, V, P, E, N, C, R, \perp\}, \delta, q, \perp, \{r\}), \text{ kde}$$

$$\begin{array}{ll} \delta(q, x, \varepsilon) = \{(q, x)\} & \delta(q, \varepsilon, S'; S) = \{(q, S')\} \\ \delta(q, y, \varepsilon) = \{(q, y)\} & \delta(q, \varepsilon, S) = \{(q, S')\} \\ \delta(q, 1, \varepsilon) = \{(q, 1)\} & \delta(q, \varepsilon, A) = \{(q, S)\} \\ \delta(q, 0, \varepsilon) = \{(q, 0)\} & \delta(q, \varepsilon, \mathbf{if} C \mathbf{then} S) = \{(q, S)\} \\ \delta(q, <, \varepsilon) = \{(q, <)\} & \delta(q, \varepsilon, VPE) = \{(q, A)\} \\ \delta(q, >, \varepsilon) = \{(q, >)\} & \delta(q, \varepsilon, x) = \{(q, V)\} \\ \delta(q, =, \varepsilon) = \{(q, =)\} & \delta(q, \varepsilon, y) = \{(q, V)\} \\ \delta(q, \mathbf{if}, \varepsilon) = \{(q, \mathbf{if})\} & \delta(q, \varepsilon, =) = \{(q, P), (q, R)\} \quad (!) \\ \delta(q, \mathbf{then}, \varepsilon) = \{(q, \mathbf{then})\} & \delta(q, \varepsilon, V) = \{(q, E)\} \\ \delta(q, ;, \varepsilon) = \{(q, ;)\} & \delta(q, \varepsilon, N) = \{(q, E)\} \\ \delta(q, +, \varepsilon) = \{(q, +)\} & \delta(q, \varepsilon, E + E) = \{(q, E)\} \\ \delta(q, \varepsilon, 0) = \{(q, N)\} & \delta(q, \varepsilon, 1) = \{(q, N)\} \\ \delta(q, \varepsilon, 0N) = \{(q, N)\} & \delta(q, \varepsilon, 1N) = \{(q, N)\} \\ \delta(q, \varepsilon, ERE) = \{(q, C)\} & \delta(q, \varepsilon, <) = \{(q, R)\} \\ \delta(q, \varepsilon, >) = \{(q, R)\} & \delta(q, \varepsilon, \perp S') = \{(r, \varepsilon)\} \end{array}$$

Syntaktickou analýzou slova **if  $x > 1$  then  $y = 10$**  je pak následující výpočet:

$$(q, \mathbf{if} x > 1 \mathbf{then} y = 10, \perp) \stackrel{\mathbf{if}}{\vdash} (q, x > 1 \mathbf{then} y = 10, \perp \mathbf{if})$$

$$\begin{aligned}
& \vdash^x (q, > 1 \text{ then } y = 10, \perp \text{if } x) \\
& \vdash^\varepsilon (q, > 1 \text{ then } y = 10, \perp \text{if } V) \\
& \vdash^\varepsilon (q, > 1 \text{ then } y = 10, \perp \text{if } E) \\
& \vdash^> (q, 1 \text{ then } y = 10, \perp \text{if } E >) \\
& \vdash^\varepsilon (q, 1 \text{ then } y = 10, \perp \text{if } ER) \\
& \vdash^1 (q, \text{ then } y = 10, \perp \text{if } ER1) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \text{ then } y = 10, \perp \text{if } ERN) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \text{ then } y = 10, \perp \text{if } ERE) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \text{ then } y = 10, \perp \text{if } C) \\
& \vdash^{\text{then}} (q, y = 10, \perp \text{if } C \text{ then}) \\
& \vdash^y (q, = 10, \perp \text{if } C \text{ then } y) \\
& \vdash^\varepsilon (q, = 10, \perp \text{if } C \text{ then } V) \\
& \vdash^= (q, 10, \perp \text{if } C \text{ then } V =) \\
& \vdash^\varepsilon (q, 10, \perp \text{if } C \text{ then } VP) \\
& \vdash^1 (q, 0, \perp \text{if } C \text{ then } VP1) \\
& \vdash^0 (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } VP10) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } VP1N) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } VPN) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } VPE) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } A) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp \text{if } C \text{ then } S) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp S) \\
& \vdash^\varepsilon (q, \varepsilon, \perp S') \\
& \vdash^\varepsilon (r, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Vypracoval: James Bond

UČO: 007

Skupina: MI6

3. [2 body] Mějme následující jazyk nad abecedou  $\{1, 2, 5, =\}$ :

$$L = \{x = y \mid x \in \{1, 2\}^*, y \in \{5\}^*, \#_1(x) + 2 \cdot \#_2(x) = 5 \cdot \#_5(y)\}$$

Jedná se tedy o jazyk všech slov, která jsou tvaru  $x = y$ , kde  $x$  se skládá pouze ze znaků 1 a 2,  $y$  jen ze znaků 5 a ciferný součet  $x$  a  $y$  je stejný. (Všimněte si, že znak  $=$  patří mezi znaky abecedy!)

Sestrojte zásobníkový automat akceptující jazyk  $L$ . Jasně uveďte, jakým způsobem Váš automat akceptuje (koncovým stavem, prázdným zásobníkem). (Motivace: jde o to, sestrojít automat, do něžž uživatel hází množství jedno- a dvoukorun, pak zmáčkne tlačítko  $=$  a následně hází množství pětikorun. Automat má rozhodnout, jestli částky vhozené před a po zmáčknutí tlačítka  $=$  byly stejné.)

**BONUS [+2 body]:** Sestrojte zásobníkový automat s jedním stavem, akceptující jazyk  $L$ . (Stačí vyřešit bonusovou variantu, neboť ta v sobě obsahuje i řešení příkladu jako takového. Napíšete-li tedy správný zásobníkový automat pro  $L$  s jedním stavem, získáte 4 body.)

*Řešení:* Idea konstrukce bude taková, že si automat bude počítat ciferný součet dosud přečtených 1 a 2 na zásobníku (pomocí jednoho pomocného symbolu  $X$ , jehož počet bude odpovídat cifernému součtu), po přečtení  $=$  přejde do nového stavu, kde bude s každým dalším symbolem 5 odečítat pět symbolů  $X$  ze zásobníku (k tomu budeme potřebovat pomocné stavy). Automat bude akceptovat koncovým stavem. Hledaný zásobníkový automat se pak dá napsat například takto:

$$A = (\{q_x, q_y, q_4, q_3, q_2, q_1, q_F\}, \{1, 2, 5, =\}, \{X, Z\}, \delta, q_x, Z, \{q_F\}), \text{ kde}$$

$$\delta(q_x, 1, Z) = \{(q_x, XZ)\}$$

$$\delta(q_x, 1, X) = \{(q_x, XX)\}$$

$$\delta(q_x, 2, Z) = \{(q_x, XXZ)\}$$

$$\delta(q_x, 2, X) = \{(q_x, XXX)\}$$

$$\delta(q_x, =, Z) = \{(q_y, Z)\}$$

$$\delta(q_x, =, X) = \{(q_y, X)\}$$

$$\delta(q_y, 5, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_4, \varepsilon, X) = \{(q_3, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_3, \varepsilon, X) = \{(q_2, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, X) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_1, \varepsilon, X) = \{(q_y, \varepsilon)\}$$

$$\delta(q_y, \varepsilon, Z) = \{(q_F, \varepsilon)\}$$

*Řešení bonusové varianty:* První idea zásobníkového automatu pro jazyk  $L$  s jediným stavem bude taková, že si všechny informace budeme pamatovat na zásobníku. Zásobník bude opět sloužit jako počítadlo, ale místo jednoho symbolu použijeme pět symbolů 1, 2, 3, 4, 5 s tím, že všechny symboly na zásobníku kromě vrcholového budou 5. Při čtení symbolu  $=$  pak dovolíme pokračovat pouze tehdy, je-li na vrcholu zásobníku symbol 5 (a tedy hodnota počítadla je dělitelná pěti). Následně budeme s každým čteným symbolem 5 jeden symbol 5 vybírat ze zásobníku.

Předchozí idea má ale drobný nedostatek – potřebujeme pro ni ve skutečnosti dva stavy (je třeba si pamatovat, jestli jsme před symbolem = nebo za ním). Toto se ale dá obejít, a k tomu opět využijeme zásobník: Budeme mít dvě varianty symbolu 5: symboly 5 a  $V$ . Symbol 5 se bude vyskytovat pouze na vrcholu zásobníku, a to pouze tehdy, nebyl-li dosud čten symbol =. Ve všech ostatních případech bude symbol 5 nahrazen symbolem  $V$ .

Automat bude samozřejmě akceptovat prázdným zásobníkem (máme-li jenom jeden stav, nemůžeme si dovolit akceptovat koncovým stavem).

Formálně se tedy dá takovýto automat zapsat takto:

$$A' = (\{q\}, \{1, 2, 5, =\}, \{1, 2, 3, 4, 5, V, Z\}, \delta, q, Z, \emptyset), \text{ kde}$$

$$\begin{array}{ll} \delta(q, 1, Z) = \{(q, 1)\} & \delta(q, 2, Z) = \{(q, 2)\} \\ \delta(q, 1, 1) = \{(q, 2)\} & \delta(q, 2, 1) = \{(q, 3)\} \\ \delta(q, 1, 2) = \{(q, 3)\} & \delta(q, 2, 2) = \{(q, 4)\} \\ \delta(q, 1, 3) = \{(q, 4)\} & \delta(q, 2, 3) = \{(q, 5)\} \\ \delta(q, 1, 4) = \{(q, 5)\} & \delta(q, 2, 4) = \{(q, 1V)\} \\ \delta(q, 1, 5) = \{(q, 1V)\} & \delta(q, 2, 5) = \{(q, 2V)\} \\ \delta(q, =, Z) = \{(q, \varepsilon)\} & \delta(q, =, 5) = \{(q, V)\} \\ \delta(q, 5, V) = \{(q, \varepsilon)\} & \end{array}$$