Nerozhodnuteľnosť

Put the right kind of software into a computer, and it will do whatever you want it to. There may be limits on what you can do with the machines themselves, but there are no limits on what you can do with software. *Time Magazin, April 1984*

Otázka

- existujú algoritmické problémy, ktoré sú prakticky neriešiteľné?
- je to len otázka dostatočne dlhého času, výkonného hardwaru resp. sofistikovaných algoritmov ???
- alebo existujú problémy, ktoré sú principiálne neriešiteľné ???

Pravidlá

- uvažujeme algoritmické problémy (tj. problémy určené svojou množinou vstupných inštancií a požadovaným vzťahom medzi vstupom a výstupom)
- problémy s nekonečnou množinou vstupných inštancií (v opačnom prípade pre problém vždy existuje algoritmus založený na vymenovaní všetkých vstupov a k ním príslušných výstupov)
- algoritmus = program zapísaný v programovacom jazyku vyššej úrovne

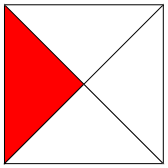
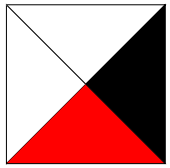
Príklad - domino

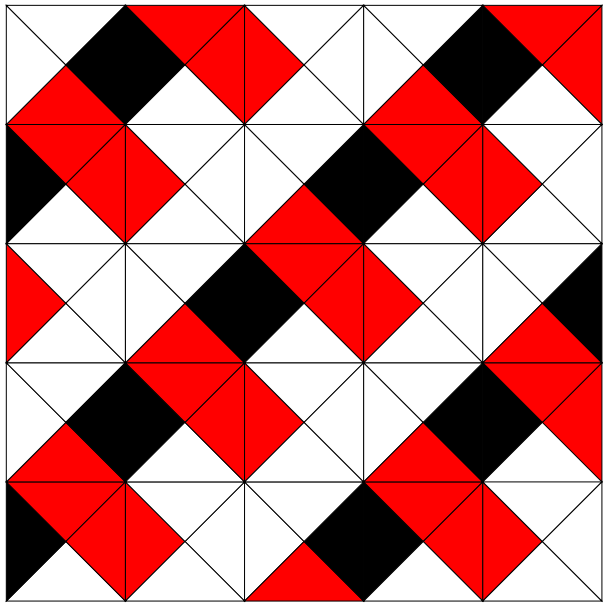
Vstup (konečná) množina T typov dlaždíc s farebnými hranami

Otázka je možné dlaždicami pokryť ľubovoľne veľkú plochu tak, aby sa dlaždice vždy dotýkali hranami rovnakej farby?

z každého typu je k dispozícii neobmedzený počet dlaždíc

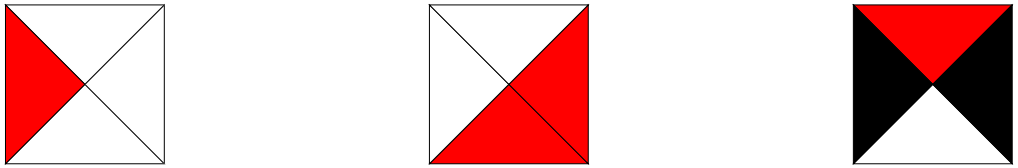
Príklad - domino, inštancia 1

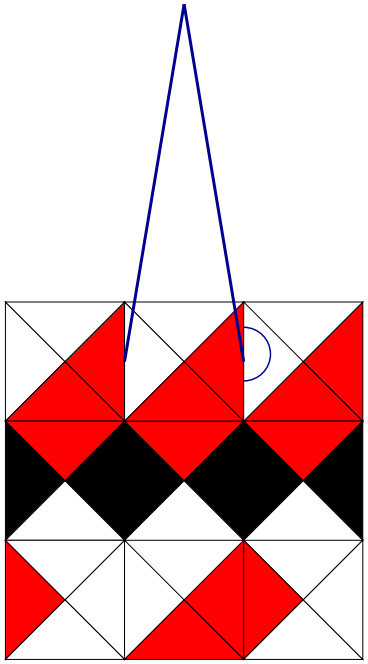



riešením inštancie 1 je „Áno“

Príklad - domino, inštancia 2





riešením inštancie 2 je „Nie“

Nerozhodnuteľné problémy

Definícia

Problém, pre ktorý neexistuje žiaden algoritmus, sa nazýva nerozhodnuteľný (algoritmicky neriešiteľný).

prakticky riešiteľné problémy

prakticky neriešiteľné problémy

nerozhodnuteľné problémy

Príklad - domino

Fakt

Problém domina je nerozhodnuteľný

- „zdroj“ nerozhodnuteľnosti
- ekvivalencia s problémom pokrytia nekonečnej plochy
- periodicita riešenia
- je dôvodom potenciálne nekonečný počet možností?
- dominový had a jeho varianty

Príklad - Postov korešpondečný problém (PKP)

Vstup dva zoznamy slov $X = (x_1, \ldots x_n)$ a $Y = (y_1, \ldots y_n)$

Otázka existuje konečná postupnosť indexov taká, že spojením príslušných slov zoznamu X vznikne rovnaké slovo ako spojením príslušných slov zoznamu Y?

	1	2	3	4	5
X	abb	a	bab	$baba$	aba
Y	$bbab$	aa	ab	aa	a

riešením inštancie je „Áno“, príkladom postupnosti je 2, 1, 1, 4, 1, 5

	1	2	3	4	5
X	bb	a	bab	$baba$	aba
Y	bab	aa	ab	aa	a

riešením ištancie je „nie“

Príklad - ekvivalencia a verifikácia programov

Ekvivalencia

Vstup dva programovacie jazyky vyššej úrovne, ktorých syntax je daná syntaktickým diagramom alebo v BNF

Otázka sú množiny syntakticky správnych programov pre oba jazyky zhodné?

Verifikácia

Vstup popis algoritmického problému a program v programovacom jazyku vyššej úrovne

Otázka rieši program daný problém? (tj. odpoveď je „Áno“ ak pre každú vstupnú inštanciu problému sa výpočet programu zastaví a dá správnu odpoveď)

Pre oba problémy závisí nerozhodnuteľnosť na voľbe programovacieho jazyka resp. na voľbe jazyka pre popis algoritmického problému. Pre bežné jazyku sú oba problémy nerozhodnuteľné.

Príklad - problém zastavenia

Uvažujme algoritmy A a B s množinou vstupných inštancií $\mathbb{N}$

Algoritmus A

while $X \neq 1$ **do** $X \leftarrow X - 2$ **od**

return X

Algoritmus B

while $X \neq 1$ **do**

    if X je sudé **do** $X \leftarrow X/2$

    if X je liché **do** $X \leftarrow 3X + 1$ **od**

return X

Algoritmus A pre sudé čísla neskončí. O algoritme B nie je známe, či skončí pre všetky vstupné inštancie.

Príklad - problém zastavenia

Vstup	program R v programovacom jazyku L vyššej úrovne a množina vstupných inštancií programu R
Otázka	zastaví sa výpočet R pre každú vstupnú inštanciu?

Problém zastavenia je nerozhodnuteľný.

Notácia: $R(x)\downarrow$ označuje, že výpočet R na x skončí; symbol $R(x)\uparrow$ označuje, že neskončí.

Riceova veta

Rozhodnuteľnosť je výnimka, ktorá potvrdzuje pravidlo

Zaujíma nás netriviálna vlastnosť programu, ktorá je
(1) pravdivá pre niektoré a nepravdivá pre ostané programy
(2) nie je viazaná na syntax programu, ale vzťahuje sa k problému, ktorý program rieši.

Riceova veta

Všetky netriviálne vlastnosti programov sú nerozhodnuteľné.

Príklady: je výstupom programu vždy „Áno“?, zastaví program pre každý vstup?

Nerozhodnuteľnosť

Dôkaz nerozhodnuteľnosti

Analógia s dôkazom NP-úplnosti
(1) dokážeme nerozhodnuteľnosť nejakého problému
(2) nerozhodnuteľnosť ďalších problémov dokazujeme metódou redukcie

V prípade nerozhodnuteľnosti použijeme redukciu, ktorá nemusí byť polynomiálne časovo ohraničená.

Redukcia

Redukcia

Pre dané dva rozhodovacie problémy P_1 a P_2; redukcia je algoritmus $\mathcal{A}$ ktorý vstupnú inštanciu X problému P_1 transformuje na vstupnú inštanciu Y problému P_2 takú, že riešením X je „Áno“ vtedy a len vtedy, ak riešením Y je tiež „Áno“.

Redukcia - príklad

redukcia problému zastavenia na problém verifikácie

Redukcia a dôkaz nerozhodnuteľnosti

Fakt

Ak P_1 sa redukuje P_2 a P_1 je nerozhodnuteľný, tak aj P_2 je nerozhodnuteľný.

Predpokladajme, že P_2 je rozhodnuteľný a že B je algoritmus, ktorý ho rieši.
Pomocou B skonštruujeme algoritmus pre P_1. Konrétne, vstupnú inštanciu X problému P_1 prevedieme pomcou algoritmu redukcie na vstupnú inštanciu Y problému P_2. Použijeme algoritmus B a nájdeme riešenie Y. Ak riešením Y je „Áno“ tak riešením X je tiež „Áno“. Ak riešením Y je „Nie“ tak riešením X je tiež „Nie“.
To je ale spor s predpokladom, že P_1 je nerozhodnuteľný.

Nerozhodnuteľnosť problému zastavenia

Tvrdenie

Neexistuje program v L, ktorý pre ľubovoľnú dvojicu $\langle R, X \rangle$ (R je syntakticky správny program v L a X je symbol reťazcov), dá na výstup „Áno“ práve ak výpočet R pre vstup X skončí po konečnom počte krokov a dá na výstup „Nie“ v opačnom prípade.

Neexistenciu programu požadovaných vlastností dokážeme sporom.

Nerozhodnuteľnosť problému zastavenia

Predpokladajme, že existuje program požadovaných vlastností, nazvime ho Q.

Skonštruujeme nový program v jazyku L, nazvime ho S, nasledovne:

1. vstupom programu S je syntakticky správny program W v jazyku L
2. program S prečíta W a vytvorí kópiu W
3. S aktivuje program Q so vstupom $\langle W, W \rangle$ (volaním Q ako procedúry)
4. výpočet Q na vstupe $\langle W, W \rangle$ skončí (z predpokladu o vlastnostiach Q) a vráti S odpoveď („Áno“ alebo „Nie“).
5. ak Q skončí s odpoveďou „Áno“, tak S vstúpi do nekonečného cyklu (jeho výpočet sa nezastaví)
6. ak Q skončí s odpoveďou „Nie“, tak S dá na výstup „Áno“.

Nerozhodnuteľnosť problému zastavenia - spor

Z konštruckie programu S je zrejmé, že S sa pre každý vstup W zastaví (s odpoveďou „Áno“) alebo jeho výpočet cyklí donekonečna.

Uvážme výpočet S na vstupe $W = S$. S aktivuje program Q na vstupe $\langle S, S \rangle$ (bod 3). Podľa predpokladu Q zastaví. Sú dve možnosti:

1. Q skončí s odpoveďou „Áno“ (tj. áno, program S sa na vstupe S zastaví); v takomto prípade ale S vstúpi do nekonečného cyklu. Dostávame spor.
2. Q skončí s odpoveďou „Nie“ (tj. nie, program S sa na vstupe S nezastaví); v takomto prípade ale S dá odpveď „Áno“. Opäť dostávame spor.

Metóda diagonalizácie

- Georg Cantor
- obecná metóda, postavená na princípe rozdielnych kardinalít
- dôkaz, že reálnych čísel je viac ako racionálnych; dolné odhady zložitosti problémov, ...

Konečné certifikáty pre nerozhodnuteľné problémy

Analógia s NP-úplnými problémami. V prípade nerozhodnuteľných problémov požadujeme od certifikátov len konečnosť a existenciu algoritmu ktorý overí, či daný reťazec je certifikátom.

PKP certifikátom odpovede „Áno“ je konkrétna, konečná postupnosť indexov; ľahko overíme, či daná postupnosť indexov má požadovanú vlastnosť

problém zastavenia certifikátom je samotný konečný výpočet; jednoducho overíme, či daná postupnosť krokov je korektným výpočtom programu na vstupe.

hadové domino certifikátom je postupnosť dlaždíc a spôsob ich skladania

domino certikát existuje pre odpoveď nie. Certifikátom je konečná plocha E. Pretože E je konečný a počet typov dlaždíc je tiež konečný, dokážeme overiť, že E sa nedá pokryť (preveríme všetky možnosti).

Čiastočne rozhodnuteľné problémy

Všetky predchádzajúce problémy mali certifikát pre jeden typ odpovede; hovoríme o tzv. jednosmernom cerfikáte.

Definícia

Nerozhodnuteľné problémy, ktoré majú jednosmerný certifikát, sa nazývajú čiastočne rozhodnuteľné.

Čiastočne rozhodnuteľné problémy majú algoritmus, ktorý je korektný pre jeden typ vstupných inštancií (tj. buď pre vstupy s odpoveďou „Áno“, alebo pre vstupy s odpoveďou „Nie“). Algoritmus systematicky overuje všetky konečné reťazce, či sú certifikátom daného vstupu.

Dvojsmerné certifikáty

- môže nastať situácia, keď pre daný problém máme certifikát ako pre odpoveď „Áno“, tak aj (iný) certifikát pre odpoveď „Nie“ (hovoríme o tzv. dvojcestnom certifikáte)?
- príklad: problém Hamiltonovského cyklu. Certifikátom pre „Áno“ vstup je permutácia vcholov (jednoducho overíme, či tvorí Hamiltonovský cyklus). Certifikátom pre „Nie“ vstup sú všetky permutácie vrcholov (jednoducho overíme, že žiadna permutácia netvorí Hamiltonovský cyklus).

Fakt

Ak problém má dvojcestný certifikát, tak je rozhodnuteľný.

Algoritmus systematicky a striedavo overuje všetky konečné reťazce či sú certifikátom pre daný vstup. Konečnosť je zaručená, pretože každý vstup má svoj certifikát.

Ešte ťažšie problémy?

- všetky čiastočne rozhodnuteľné problémy sú vzájomne redukovateľné (*analógia s NP-úplnými problémami, tkroé sú polynomiálne ekvivalentné*)
- existujú problémy, ktoré sú ťažšie než NP-úplné; platí analógia aj pre čiastočne rozhodnuteľné problémy?

problém verifikácie existuje redukcia problému zastavenia na problém verifikácie; opačná redukcia ???

úplný problém zastavenia (je výpočet programu konečný pre všetky vstupné inštancie?) Existuje redukcia problému zastavenia na úplný problém zastavenia; opačná redukcia ???

Problém verifikácie ani úplný problém zastavenia nemajú certifikáty

Stupne nerozhodnuteľnosti

- analogicky ako rozhodnuteľné problémy môžeme zoskupiť do rôznych zložitostných tried, tak aj nerozhodnuteľné problémy tvoria úrovne podľa stupňa nerozhodnuteľnosti
- každá úroveň obsahuje problémy, ktoré sú ešte ťažšie než problémy predchádzajúcej úrovne
- prvé dve úrovne hierarchie tvoria čiastočne rozhodnuteľné a nerozhodnuteľné problémy
- ďalšie úrovne označujeme súhrnne ako vysoko nerozhodnuteľné problémy

Vysoko nerozhodnuteľné problémy - príklad

modifikácia problému domina kde požadujeme, aby v nekonečnom pokrytí bola vopred špecifikovaná dlaždica použitá nekonečne veľa krát