Řešení příkladu 4.7 a) ze sady na 4. cvičeních

Zadání

Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ bez rovnosti, kde P a Q jsou unární predikátové symboly. Rozhodněte a dokažte, zda pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

$$\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x))$$

Řešení

Platí. Mějme libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ a ohodnocení e takové, že $\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x))\ [e]$. Pro každé $a \in M$ tedy platí $\mathcal{M} \models P(x) \leftrightarrow Q(x)\ [e(x/a)]$. Tedy pro každé $a \in M$ platí $e[x/a](x) \in P_M$, právě když $e[x/a](x) \in Q_M$, a tedy platí $a \in P_M$, právě když $a \in Q_M$ (protože $e[x/a](x)$ je a).

Předpokládejme, že $\mathcal{M} \models \forall x\ P(x)\ [e]$. Tedy obdobnou argumentací jako výše dostáváme, že pro všechna $a \in M$ platí $a \in P_M$. Pak pro všechna $a \in M$ také platí $a \in Q_M$, tedy $\mathcal{M} \models \forall x\ Q(x)\ [e]$. Ze symetrie plyne i opačná implikace, tedy celkově dostáváme $\mathcal{M} \models (\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x))\ [e]$.

Zcela formální řešení

Pozn.: takto formální řešení nejsou požadována u zkoušky, zde je uvedeno pouze pro ukázku, jak by bylo možné postupovat. U zkoušky skutečně plně dostačuje řešení uvedené výše.

Mějme libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ a libovolné ohodnocení e. Výraz

$$\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x))\ [e].$$

z definice platí pokud

$$\mathcal{M} \not\models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x))\ [e] \quad \text{nebo}$$
$$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x)\ [e]$$

Předpokládejme, že

$$\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x))\ [e],$$

potřebujeme dokázat, že

$$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x)\ [e]$$

což dle definice platí, pokud

$$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x)[e], \quad \text{právě když} \quad \mathcal{M} \models \forall x\ Q(x)\ [e].$$

Úpravou předpokladu dle definice máme

$$\mathcal{M} \models (P(x) \leftrightarrow Q(x))\ [e(x/a)] \quad \text{pro všechna } a \in M,$$

a tedy pro každé $a \in M$ platí

$$\mathcal{M} \models P(x)\ [e(x/a)], \quad \text{právě když} \quad \mathcal{M} \models Q(x)\ [e(x/a)]. \tag{1}$$

Nyní můžeme dokázat požadovanou ekvivalenci. Předpokládejme její levou stranu, tedy, že platí

$$\mathcal{M} \models \forall x\ P(x)\ [e],$$

to je z definice právě když

$$\mathcal{M} \models P(x)\ [e(x/a)] \quad \text{pro všechna } a \in M,$$

což s pomocí tvrzení (1) platí, právě když

$$\mathcal{M} \models Q(x)\ [e(x/a)] \quad \text{pro všechna } a \in M,$$

což je z definice právě když

$$\mathcal{M} \models \forall x\ Q(x)\ [e].$$

Dostali jsme pravou stranu dokazované ekvivalence. Celkově tedy pro libovolné e platí

$$\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x))\ [e].$$

Protože jsme zvolili e libovolně (platí to pro každé e), dostáváme

$$\mathcal{M} \models \forall x\ (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\ P(x) \leftrightarrow \forall x\ Q(x)).$$