1 První cvičení

1.1 Indukce

Příklad 1.1 Dokažte, že pro každou konečnou množinu A platí

$$|2^A| = 2^{|A|}$$

kde $2^A = \{C | C \subseteq A\}$ a $|X|$ značí počet prvků konečné množiny X.

Příklad 1.2 Dokažte, že pro všechny konečné množiny A, B platí

$$|B^A| = |B|^{|A|}$$

kde $B^A = \{f | f : A \to B\}$ je množina všech zobrazení z A do B a $|X|$ značí počet prvků konečné množiny X.

Příklad 1.3 Definujme induktivně množinu $X \subseteq \mathbb{N}_0$.

- Položíme $2 \in X$ a $3 \in X$.
- Dále pro každé $x, y \in X$ platí $x \cdot y \in X$.

To stejné formálněji: $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$, kde $X_1 = \{2, 3\}$ a $X_{i+1} = X_i \cup \{x \cdot y \mid x, y \in X_i\}$.

Dokažte, že pro každý prvek $x \in X$ platí

$$\text{buď} \quad 2 \mid x \quad \text{nebo} \quad 3 \mid x$$

kde $c \mid x$ je relace dělitelnosti, tedy pro $c \in \mathbb{N}$ a $x \in \mathbb{N}_0$ platí $c \mid x$ pokud existuje $b \in \mathbb{N}_0$ takové, že $c \cdot b = x$.

1.2 Relace

Příklad 1.4 Dejte příklad množiny A a relace R na množině A t.ž.

a) R je reflexivní, symetrická a *není* transitivní

b) R je reflexivní, transitivní a *není* symetrická

c) R je symetrická, transitivní a *není* reflexivní

Příklad 1.5 Nechť A je množina a R, S jsou relace ekvivalence na množině A. Které z následujících jsou také relace ekvivalence?

a) $R \cap S$

b) $R \cup S$

c) $R \setminus S$

d) $R \circ S$

Příklad 1.6 Kolik je ekvivalencí na množině $\emptyset$?

1.3 Funkce

Příklad 1.7 Nechť A,B jsou neprázdné množiny a $f : A \to B$ je funkce. Dokažte, že

a) f je injektivní, právě když existuje $g : B \to A$ t.ž. $g \circ f = id_A$

b) f je surjektivní, právě když existuje $g : B \to A$ t.ž. $f \circ g = id_B$

kde $id_X(a) = a$ pro každé $a \in X$.

1.4 Uspořádané množiny

Definice 1.8 Nechť $(A, \sqsubseteq)$ a $(B, \preceq)$ jsou uspořádané množiny. Řekneme, že tyto uspořádané množiny jsou *izomorfní*, pokud existuje bijekce $f : A \to B$, t.ž. pro všechna $x, y \in A$ platí $x \sqsubseteq y \Longleftrightarrow f(x) \preceq f(y)$.

Příklad 1.9 Nechť $C = \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$. Nalezněte

a) dvě různá izomorfní uspořádání na C a

b) dvě navzájem neizomorfní uspořádání na C.

Příklad 1.10 Nalezněte

a) dvě navzájem neisomorfní uspořádání na $\mathbb{N}_0$

b) nekonečně mnoho navzájem neisomorfních uspořádání na $\mathbb{N}_0$

c) nespočetně mnoho navzájem neisomorfních uspořádání na $\mathbb{N}_0$
(tip: množina všech nekonečných posloupností přirozených čísel je nespočetná)

a dokažte, že nejsou isomorfní.

Příklad 1.11 Nalezněte

a) dvě navzájem neisomorfní lineární uspořádání na $\mathbb{N}_0$

b) nekonečně mnoho navzájem neisomorfních lineárních uspořádání na $\mathbb{N}_0$

c) nespočetně mnoho navzájem neisomorfních lineárních uspořádání na $\mathbb{N}_0$

a dokažte, že nejsou isomorfní.

Příklad 1.12 Nechť $(A, \sqsubseteq)$ je konečná uspořádaná množina. Dokažte, že existuje lineární uspořádání $\preceq$ na A, t.ž. $\sqsubseteq \subseteq \preceq$.