

3 Třetí cvičení

3.1 Normální formy

☆☆☆ **Příklad 3.1** Necht' φ , ψ a ξ jsou formule výrokové logiky. Dokažte, že platí:

- $(\varphi \rightarrow \psi) \approx (\neg\varphi \vee \psi)$
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \approx (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
- $\neg(\varphi \vee \psi) \approx (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$
- $(\varphi \wedge (\psi \vee \xi)) \approx ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \xi))$
- $(\varphi \vee (\psi \wedge \xi)) \approx ((\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \xi))$

☆☆☆ **Příklad 3.2** Mějme formule ξ a ξ' takové, že $\xi \approx \xi'$. Dokažte, že pro libovolnou formuli φ a pro formuli ψ , kterou získáme nahrazením všech výskytů ξ za ξ' ve formuli φ , platí $\varphi \approx \psi$.

☆☆☆ **Příklad 3.3** Převeďte formuli $(A \rightarrow B) \wedge ((C \rightarrow E) \rightarrow \neg(C \wedge \neg D))$ do DNF.

☆☆☆ **Příklad 3.4** Převeďte formuli $(A \rightarrow B) \vee ((C \rightarrow E) \rightarrow \neg(C \wedge \neg D))$ do CNF.

3.2 Logické systémy

☆☆☆ **Příklad 3.5** Pro formuli $\varphi \approx A \rightarrow (B \rightarrow (C \rightarrow (D \rightarrow E)))$ nalezněte ekvivalentní formuli v logickém systému $\mathcal{L}(|)$ kde $|$ je Shefferův operátor, tedy $\varphi | \psi \approx \neg(\varphi \wedge \psi)$.

☆☆☆ **Příklad 3.6** Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující logické systémy plnohodnotné.

- $\mathcal{L}(\neg)$
- $\mathcal{L}(\wedge, \vee)$
- $\mathcal{L}(\neg, \rightarrow)$

3.3 Dokazatelnost

Mějme logický systém $\mathcal{L}(\rightarrow, \neg)$ a Lukasiewiczův odvozovací systém:

- A1: $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- A2: $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \xi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \xi))$
- A3: $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
- MP: z φ a $\varphi \rightarrow \psi$ odvod' ψ

☆☆☆ **Příklad 3.7** Necht' P a Q jsou výrokové proměnné. Rozhodněte a dokažte, zda jsou následující formule dokazatelné.

- $P \rightarrow (Q \rightarrow P)$
- $P \rightarrow P$
- $P \rightarrow Q$