4 Čtvrté cvičení

4.1 Věty o úplnosti a korektnosti

Příklad 4.1 Mějme odvozovací systém s jedním schématem axiomu A1: $\varphi \to \varphi$ a s pravidlem modus ponens. Nechť φ je formule systému $\mathcal{L}(\to, \neg)$. Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení.

a) Pokud $\vdash \varphi$, pak $\models \varphi$.
b) Pokud $\models \varphi$, pak $\vdash \varphi$.

4.2 Věta o kompaktnosti

Příklad 4.2 Mějme $n \in \mathbb{N}$ a výrokové proměnné $X_1, \dots, X_n$. Pro slovo $w \in \{0,1\}^n$ značíme symbolem v_w valuaci takovou, že pro $1 \leq i \leq n$ máme $v_w(X_i) = w(i)$, kde $w(i)$ je i-tý znak slova w, a $v_w(Y) = 0$ pro všechna ostatní Y.

Nechť S je jazyk nad abecedou $\{0,1\}$. Zadejte formuli φ_n takovou, že pro každé slovo $w \in \{0,1\}^n$ platí, že φ_n je pravdivá při valuaci v_w, právě když w je prefixem nějakého slova z S.

Příklad 4.3 Nechť S je nekonečný jazyk nad abecedou $\{0,1\}$. Dokažte, že existuje posloupnost b_1,b_2,b_3,... taková, že každé b_i se nerovná b_{i+1}, je prefixem b_{i+1} a je prefixem nějakého prvku z S.

Příklad 4.4 Nechť A, B jsou spočetné množiny a $R \subseteq A \times B$ je relace taková, že pro každé $a \in A$ je $B_a = \{b \mid (a,b) \in R\}$ konečný neprázdný soubor. Dokažte, že pokud pro každou *konečnou* část $A' \subseteq A$ existuje injektivní funkce $f_{A'} : A' \to B$ taková, že $f_{A'} \subseteq R$ (zde funkci $f_{A'}$ chápeme jako relaci), pak existuje také injektivní funkce $f : A \to B$ taková, že $f \subseteq R$.
(Také zadání můžete chápat jako bipartitní graf zadaný pomocí (A, B, R) s párováním f či $f_{A'}$.)

4.3 Základy predikátové logiky

Příklad 4.5 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol a realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$. Dejte příklad *uzavřené* formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M} \models \varphi$ právě tehdy, když

a) $(M, \cdot_M)$ je pologrupa
b) $(M, \cdot_M)$ je monoid
c) $(M, \cdot_M)$ je grupa

Příklad 4.6 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\sim\}$ s rovností, kde $\sim$ je binární predikátový symbol a realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$. Dejte příklad *uzavřené* formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že $\mathcal{M} \models \varphi$ právě tehdy, když

a) $\sim_M$ je relace ekvivalence na M
b) $\sim_M$ je relace uspořádání na M

Příklad 4.7 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ bez rovnosti, kde P a Q jsou unární predikátové symboly. Rozhodněte a dokažte, zda pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí

a) $\mathcal{M} \models \forall x\, (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x))$
b) $\mathcal{M} \models (P(x) \leftrightarrow Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, Q(x))$

Příklad 4.8 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symboly. Mějme formuli $\varphi \equiv \forall x\, \forall y\, (x \cdot y = y \cdot x)$. Rozhodněte a dokažte, zda

a) pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models \varphi$,
b) existuje realizace $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models \varphi$.

Příklad 4.9 Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Mějme nějaký jazyk $\mathcal{L}$, realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a formuli φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Pak

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$$