5 Páté cvičení

Vzorové řešení většiny těchto příkladů na http://www.fi.muni.cz/∼xbrazdil/plogika.ps

5.1 Základy predikátové logiky

Příklad 5.1 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ bez rovnosti, kde P je binární predikátový symbol. Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení:

a) $\mathcal{M} \models \forall x\, \forall z\, (P(x,z) \rightarrow \exists y\, P(x,y))$
b) $\mathcal{M} \models (\forall x\, \exists y\, P(x,y)) \rightarrow (\exists y\, \forall x\, P(x,y))$
c) $\mathcal{M} \models (\exists y\, \forall x\, P(x,y)) \rightarrow (\forall x\, \exists y\, P(x,y))$

Příklad 5.2 Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Mějme nějaký jazyk $\mathcal{L}$, realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a formuli φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Pak

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$$

Příklad 5.3 Rozhodněte, zda platí následující tvrzení: Mějme jazyk $\mathcal{L}$, realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a *uzavřenou* formuli φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$. Pak

$$\mathcal{M} \models \varphi \text{ právě tehdy, když } \mathcal{M} \not\models \neg\varphi$$

Příklad 5.4 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{<\}$ s rovností, kde $<$ je binární predikátový symbol. Uvažme tři realizace $\mathcal{N}, \mathcal{Z}, \mathcal{Q}$ jazyka $\mathcal{L}$ s nosiči $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ (množiny přirozených, celých a racionálních čísel), které interpretují symbol $<$ jako standardní *ostré* uspořádání na příslušné množině čísel. Dejte příklad uzavřené formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že

a) $\mathcal{N} \models \varphi, \mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \not\models \varphi$
b) $\mathcal{N} \not\models \varphi, \mathcal{Z} \models \varphi, \mathcal{Q} \not\models \varphi$
c) $\mathcal{N} \not\models \varphi, \mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \models \varphi$

Příklad 5.5 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{\cdot\}$ s rovností, kde $\cdot$ je binární funkční symbol. Uvažme tři realizace $\mathcal{Z}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ s nosiči $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ (množiny celých, racionálních a reálných čísel), které intepretují symbol $\cdot$ jako standardní násobení čísel. Dejte příklad uzavřené formule φ predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ takové, že

a) $\mathcal{Z} \not\models \varphi, \mathcal{Q} \models \varphi$
b) $\mathcal{Q} \not\models \varphi, \mathcal{R} \models \varphi$

Příklad 5.6 Nechť φ je formule predikátového počtu jazyka $\mathcal{L}$ taková, že x je jediná volná proměnná ve φ. Rozhodněte, zda pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ a libovolnou proměnnou y substituovatelnou za x ve φ platí

a) $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow (\varphi(x/y))$,
b) $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \exists y\, (\varphi(x/y))$.

5.2 Teorie

Příklad 5.7 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \emptyset$ s rovností. Dejte příklad teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ takové, že všechny její modely mají *nekonečný* nosič.

Příklad 5.8 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{S\}$ s rovností, kde S je unární funkční symbol. Dejte příklad *splnitelné konečné* teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ takové, že všechny její modely mají *nekonečný* nosič.

Příklad 5.9 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{S\}$ s rovností, kde S je unární funkční symbol. Mějme teorii

$$T = \{\forall x\, \forall y\, (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)\}.$$

Rozhodněte a dokažte, zda platí následující tvrzení.

a) $T \models \forall x\, \neg(S(x) = x)$
b) Teorie T je bezesporná.
c) Teorie T je úplná.