6 Šesté cvičení

Příklad 6.1 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{R\}$ s rovností, kde R je binární predikátový symbol. Zadejte teorii T takovou, že realizace $\mathcal{M}$ je modelem T, právě když (M, R_M) je lineárně uspořádaná množina. Existuje taková úplná teorie?

6.1 Kanonická struktura

Příklad 6.2 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{P, 0, f\}$ bez rovnosti, kde P je unární predikátový symbol, 0 je nulární funkční symbol a f je unární funkční symbol. Popište kanonické struktury následujících teorií s jazykem $\mathcal{L}$.

a) $T_1 = \{P(0)\}$
b) $T_2 = \{P(x)\}$
c) $T_3 = \{\exists x\, P(x)\}$

6.2 Rozšíření teorie

Příklad 6.3 Mějme jazyk $\mathcal{L} = \{P\}$ s rovností, kde P je unární predikátový symbol. Dále mějme teorie $T_1 = \{P(x) \leftrightarrow P(y)\}$ a $T_2 = \{x = y\}$ s jazykem $\mathcal{L}$.

a) Je T_2 rozšíření teorie T_1?
b) Je T_2 *konzervativní* rozšíření teorie T_1?

6.3 Existence teorií

Příklad 6.4 Existuje teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že realizace $\mathcal{M}$ je modelem teorie T, právě když nosič $\mathcal{M}$ má (konečný) sudý počet prvků.

Příklad 6.5 Nechť T je konečná teorie s jazykem $\mathcal{L}$ obsahující pouze uzavřené formule. Dokažte, že existuje konečná teorie T' s jazykem $\mathcal{L}$ taková, že $\mathcal{M} \models T'$ právě tehdy, když $\mathcal{M} \not\models T$ pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$.

Příklad 6.6 Nechť $\mathcal{L} = \{R\}$ je jazyk s rovností, kde R je binární predikátový symbol. Dokažte, že neexistuje teorie T taková, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ jazyka $\mathcal{L}$ platí $\mathcal{M} \models T$ právě tehdy, když (M, R_M) je silně souvislý orientovaný graf.

6.4 Zkouškové příklady

Přikládáme několik *těžších* zkouškových příkladů z minulých let. Na zkoušce se nejspíš objeví i jiné typy příkladů než v minulých letech, nespoléhejte tedy *pouze* na kolektivní znalosti na fi.muny.cz. Kromě zvládnutí podobných příkladů jako níže se jistě vyplatí velmi dobře rozumět základním definicím a významu hlavních vět z přednášky. Mnohem důležitější než učit se důkazy z přednášky nazpaměť je těmto důkazům rozumět.

Příklad 6.7 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností a s jedním binárním predikátovým symbolem R. Dejte příklad teorie T s jazykem $\mathcal{L}$ takové, že libovolná realizace $\mathcal{M}$ jazyka L je modelem T právě když (M, R_M) *není* lineárně uspořádaná množina.

Příklad 6.8 Nechť $\mathcal{L}$ je prázdný jazyk s rovností. Zadejte teorii T takovou, že pro libovolnou realizaci $\mathcal{M}$ platí, že $\mathcal{M} \models T$, právě když nosič M realizace $\mathcal{M}$ je nekonečný nebo existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $|M| = 2^k$.

Příklad 6.9 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností a se dvěma binárními funkčními symboly $+$ a $*$. Dále nechť $R = (\mathbb{R}_{\geq 0}, +_{\mathbb{R}_{\geq 0}}, *_{\mathbb{R}_{\geq 0}})$ a $Q = (\mathbb{Q}_{\geq 0}, +_{\mathbb{Q}_{\geq 0}}, *_{\mathbb{Q}_{\geq 0}})$ jsou dvě realizace tohoto jazyka, které mají za nosič nezáporná reálná, resp. nezáporná racionální čísla a kde funkční symboly $+$ a $*$ jsou realizovány standardní operací sčítání a násobení na příslušných množinách. Zadejte formuli φ v jazyce $\mathcal{L}$ takovou, že $R \models \varphi$ a $Q \not\models \varphi$.

Příklad 6.10 Nechť $\mathcal{L}$ je jazyk s rovností a s jedním unárním predikátovým symbolem P. Dále nechť T je teorie s jazykem $\mathcal{L}$. Nalezněte rozšíření T' teorie T takové, že pro každou realizaci $\mathcal{M}$ platí, že $\mathcal{M} \models T$, právě když $\mathcal{M} \models T$ a zároveň $P_M = M$. Rozhodněte a dokažte, zda je takové rozšíření konzervativní.