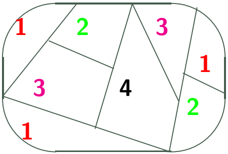
8 Rovinnost a kreslení grafů

V přímé návaznosti na předchozí lekci se zaměříme na druhý důležitý aspekt slavného problému čtyř barev, který byl původně formulován pro barevné rozlišení států na politické mapě:



Jak tedy taková obarvovaná politická mapa souvisí s kreslením grafů? Jednoduše – souvislé státy můžeme reprezentovat jako vrcholy grafu a hranami pak zaznamenat „sousednost“ mezi státy. Důležité je, že takto vzniklý graf můžeme zřejmě zakreslit v rovině bez křížení hran a nazýváme jej proto *rovinným grafem*.

Stručný přehled lekce

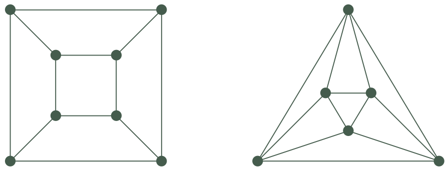
- Kreslení grafů, definice rovinného grafu a základní vlastnosti.
- Rozpoznávání rovinných grafů (Kuratowského věta).
- Barvení map a rov. grafů - problém čtyř barev a nástin jeho řešení.
- Kreslení grafů s křížením hran – průsečíkové číslo.

8.1 Rovinné kreslení grafu

Definice 8.1. **Rovinným nakreslení** grafu G
myslíme zobrazení, ve kterém jsou vrcholy znázorněny jako různé body v rovině a hrany jako oblouky spojující body svých koncových vrcholů. Přitom hrany se nesmí nikde křížit ani procházet jinými vrcholy než svými koncovými body.

Graf je *rovinný* pokud má rovinné nakreslení. □

Důležitým příkladem rovinných grafů jsou grafy (třírozměrných Euklidovských) mnohostěnů, třeba graf čtyřstěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu, atd.



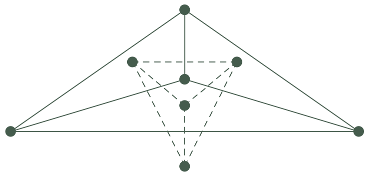
Platí, že grafy mnohostěnů jsou vždy rovinné a 3-souvislé. Naopak každý rovinný 3-souvislý jednoduchý graf je grafem nějakého mnohostěnu. (Důkaz tohoto tvrzení je obtížný.)

Definice: *Stěnami* rovinného nakreslení grafu nazýváme (topologicky) souvislé oblasti roviny ohraničené tímto nakreslením grafu.

Rovinný graf může mít více *podstatně různých* nakreslení, ale 3-souvislý rovinný graf má ve všech svých rovinných nakresleních „stejné stěny“ (Důsledek 8.11). □

Definice. *Duální (multi)graf* rovinného nakreslení grafu G získáme tak, že stěny nahradíme vrcholy duálu a hranami spojíme sousedící dvojice stěn.

Duální multigraf k rovinnému grafu je vždy rovinný, což je relativně snadné dokázat topologicky. Na druhou stranu však často bude obsahovat násobné hrany a dokonce i smyčky.



8.2 Eulerův vztah o počtu stěn

Nyní si uvedeme zajímavý a vlastně „jediný rozumný kvantitativní“ vztah o rovinných nakresleních grafů. Jedná se o slavný Eulerův vztah, který říká:

Věta 8.2. *Nechť rovinné nakreslení souvislého grafu G má f stěn. Pak*

$$|V(G)| + f - |E(G)| = 2\,.$$

Důkaz: Nechť počet vrcholů v G je v a hran h.

- Pokud je G strom, tj. nemá kružnice, má ve svém nakreslení jedinou stěnu a dle Věty 4.3 má přesně $h = v - 1$ hran. Potom platí $v + f - h = v + 1 - (v - 1) = 2$.
- Pokud G obsahuje kružnici C, pak vypustíme jednu její hranu e. Tím se počet hran sníží o 1, ale zároveň se sníží o 1 počet stěn, protože kružnice C původně oddělovala (viz Jordanova věta o kružnici) dvě stěny přilehlé k hraně e od sebe, ale nyní tyto dvě stěny „splynou“ v jednu. Počet vrcholů se nezmění. Proto se nezmění hodnota $v + f - h = v + (f - 1) - (h - 1) = 2$.

Tvrzení tak plyne z principu matematické indukce. □

Poznámka: Všimněte si dobře, že Eulerův vztah vůbec nezávisí na tom, jak je graf G nakreslený, je to vlastnost grafu jako takového.

Tento jednoduše vypadající vztah má mnoho aplikací a důsledků.

Důsledek 8.3. *Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech má nejvýše $3v-6$ hran. Jednoduchý rovinný graf na $v \geq 3$ vrcholech a bez trojúhelníků má nejvýše $2v-4$ hran.* □

Důkaz: Můžeme předpokládat, že graf je souvislý, jinak bychom přidali další hrany. Nechť počet vrcholů v G je v, stěn je f a hran h. Jelikož nemáme smyčky ani násobné hrany, má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 3 hrany, přitom každou hranu započítáme ve dvou přilehlých stěnách. Pak tedy platí $h \geq \frac{1}{2} \cdot 3f$, neboli $\frac{2}{3}h \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 8.2 získáme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{3}h - h = v - \frac{1}{3}h$$

$$h \leq 3(v-2) = 3v - 6\,. \square$$

Druhá část se dokazuje obdobně, ale nyní víme, že graf nemá ani trojúhelníky, a tudíž má každá stěna v nakreslení grafu na obvodu aspoň 4 hrany. Pak tedy platí $h \geq \frac{1}{2} \cdot 4f$, neboli $\frac{2}{4}h \geq f$. Dosazením do vztahu Věty 8.2 získáme

$$2 = v + f - h \leq v + \frac{2}{4}h - h = v - \frac{1}{2}h$$

$$h \leq 2(v-2) = 2v - 4\,.$$

Tím jsme hotovi. □

Důsledek 8.4. *Každý jednoduchý rovinný graf obsahuje vrchol stupně nejvýše* 5*.*
Každý jednoduchý rovinný graf bez trojúhelníků obsahuje vrchol stupně nejvýše 3*.* □

Důkaz: Pokud by všechny vrcholy měly stupně alespoň 6, celý graf by měl aspoň $\frac{1}{2} \cdot 6v = 3v$ hran, což je ve sporu s Důsledkem 8.3. Některý vrchol musí tudíž mít menší stupeň než 6.

Obdobně postupujeme u druhého tvrzení. □

8.3 Rozpoznání rovinných grafů

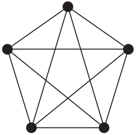
Při praktickém využití rovinných grafů je potřeba umět abstraktně zadaný graf rovinně nakreslit bez křížení hran. Na rozdíl od problému určení barevnosti grafu se naštěstí jedná o efektivně algoritmicky řešitelný problém. □

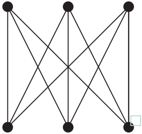
První algoritmus běžící v lineárním čase byl podán Hopcroftem a Tarjanem 1974 a od té doby se objevilo několik jednodušších algoritmů, ale stále nejsou dostatečně přístupné, abychom je mohli ukázat v omezeném čase na přednášce.

Věta 8.5. *Rozhodnout rovinnost a nalézt příslušné nakreslení daného grafu lze v lineárním čase (vůči počtu vrcholů).*

Místo obecných algoritmů pro rovinné kreslení grafů se zde podíváme na otázku, jak odůvodnit nerovinnost (malého) grafu.

Příklad 8.6. *Ukažme, že následující dva grafy, K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.*

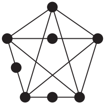
K_5 

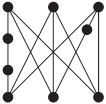
$K_{3,3}$ 

Při zdůvodnění využijeme znalosti předchozího oddílu. Všimněme si, že graf K_5 má 5 vrcholů a $10 > 3 \cdot 5 - 6$ hran. Podobně graf $K_{3,3}$ má 6 vrcholů a $9 > 2 \cdot 6 - 4$ hran, přitom neobsahuje žádné trojúhelníky. Proto podle Důsledku 8.3 žádný z nich není rovinný. □

Důsledek 8.7. *Grafy K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.*

Definice: *Podrozdělením* grafu G rozumíme graf, který vznikne z G nahrazením některých hran novými cestami libovolné (kladné) délky.

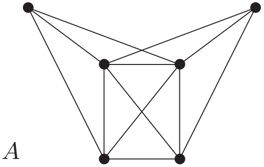


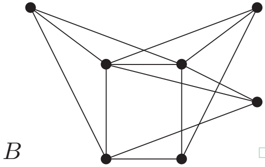


Důležitý abstraktní popis všech rovinných grafů nalezl K.Kuratowski:

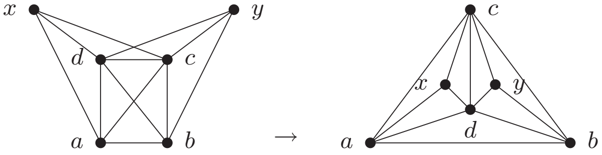
Věta 8.8. *Graf G je rovinný právě když neobsahuje podrozdělení grafů K_5 nebo $K_{3,3}$ jako podgrafy.*

Příklad 8.9. *Které z následujících dvou grafů jsou rovinné? Najděte rovinné nakreslení (včetně očíslovaných vrcholů), nebo zdůvodněte nerovinnost grafu.*

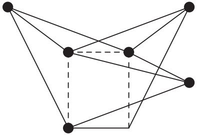




Po chvíli zkoumání určitě přijdeme na to, že graf A se dá nakreslit rovinně takto:



Graf B na druhou stranu rovinný není podle Věty 8.8, protože je v něm obsaženo podrozdělení grafu $K_{3,3}$, které je ukázáno na tomto obrázku:



□

Jednoznačnost rovinného nakreslení

Fakt: V 2-souvislém rovinném grafu je každá stěna ohraničená kružnicí.

Díky tomuto faktu lze snadno nadefinovat, že dvě rovinná nakreslení 2-souvislého grafu jsou *ekvivalentní*, pokud jejich stěny tvoří stejné soubory kružnic. □

Klíčovým výsledkem nyní je:

Lema 8.10. *Kružnice C v 3-souvislém rovinném grafu G je stěnou jeho nakreslení, právě když podgraf $G - V(C)$ je souvislý graf.* □

Důkaz: V jednom směru, pokud $G' = G - V(C)$ je souvislý, pak podle Jordanovy věty o kružnici leží celý G' uvnitř jedné oblasti C, tudíž druhá oblast C je stěnou v každém nakreslení G. □

Naopak pokud C ohraničuje stěnu v některém rovinném nakreslení grafu G, dokážeme, že každé dva vrcholy mimo C lze spojit cestou disjunktní s C. Nechť tedy $x, y \in V(G) \setminus V(C)$ a označme X (či Y) množinu těch vrcholů C dosažitelných z x (z y) po cestách neprocházejících přes C. Jelikož x, y náleží stejné stěně kružnice C, množiny X, Y se na C „nepřekrývají“, přesněji je lze od sebe oddělit odebráním některých dvou vrcholů $c, d \in V(C)$. Pak však $\{c, d\}$ je řezem v grafu G oddělujícím x od y a to odporuje předpokladu 3-souvislosti, spor. □ □

Důsledek 8.11. *Každá dvě rovinná nakreslení 3-souvislého grafu jsou ekvivalentní.*

Zajímavou aplikací Důsledku 8.11 je algoritmus pro rozpoznávání isomorfizmu rovinných grafů, který mimo porovnávání rovinných nakreslení 3-souvislých komponent používá metody rozkladu grafu na "více-souvislé" komponenty a testování isomorfizmu stromů:

Věta 8.12. *Problém isomorfizmu rovinných grafů je řešitelný v lineárním čase.*

Závěrem si ještě bez důkazu uvedeme, že rovinné grafy vždy mají pěkné nakreslení v rovině.

Věta 8.13. *Každý jednoduchý rovinný graf lze nakreslit v rovině (bez křížení hran) tak, že hrany jsou úsečky.*

8.4 Barvení map a rovinných grafů

Vzpomeňme si na již zmiňovaný převod mapy na graf – jedná se vlastně o vytvoření duálního grafu k této mapě. Aby v duálním grafu k mapě nevznikly smyčky, v mapě nesmí žádný stát sousedit sám se sebou, což je přirozený požadavek.

V roce 1976 Appel a Haken, a pak znovu v roce 1993 Robertson, Seymour, Sanders a Thomas, dokázali tuto větu, která rozřešila problém čtyř barev a která je jedním z nejslavnějších výsledků diskrétní matematiky vůbec:

Věta 8.14. *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 4 barvami.* □

Důkaz této věty je nesmírně složitý (však byl také hledán po více než 100 let a k jeho úplnému provedení je stále třeba počítač), a proto si uvedeme slabší a mnohem jednodušší tvrzení:

Tvrzení 8.15. *Každý rovinný graf bez smyček lze obarvit 6 barvami.*
Každý rovinný graf bez smyček a bez trojúhelníků lze obarvit 4 barvami. □

Důkaz: Podle Důsledku 8.4 najdeme v každém podgrafu G vrchol v stupně nejvýše 5, a tudíž je G 5-degenerovaný a obarvíme jej podle Věty 7.6. Druhou část dokážeme obdobně, když nalezneme vrchol stupně ≤ 3. □

Věta 8.16. *Každý rovinný graf bez smyček má výběrovou barevnost nejvýše* 5. □

Důkaz (náznak): Poměrně přímočarou indukcí lze dokázat následující zesílené tvrzení:

Nechť rovinný graf G *s vnější stěnou ohraničenou kružnicí* C *má všechny ostatní stěny trojúhelníky. Nechť každý vrchol mimo* C *má přiřazen seznam* 5 *barev, vrcholy* C *mají seznamy* 3 *barev a jisté dva sousední vrcholy* x, y *na* C *mají přímo předepsané (různé) barvy. Pak* G *lze výběrově obarvit.*

- Nechť $z \neq y$ je druhý soused x na C. Pokud některá hrana f ze z nenáležející C má druhý konec také na C, pak podél f „rozdělíme" G na podgraf G_1 obsahující x, y a podgraf G_2 sdílející hranu f s G_1. Indukcí nejprve obarvíme G_1, pak G_2 taktéž splní indukční předpoklad a i jej dobarvíme.
- Jinak budeme indukcí barvit podgraf $G_3 = G - z$; přičemž všem sousedům z uvnitř G odebereme ze seznamu (jejich pěti) barev dvě z barev seznamu u vrcholu z různé od barvy x. Následně dobarvíme vrchol z, pro nějž máme tři možnosti a jen jeho dva sousedé na C s ním mohou být v konfliktu.

□

8.5 Praktické „pružinové“ kreslení grafů

Závěrem se podívejme na trochu jinou problematiku – jak prakticky nakreslit daný (nerovinný) graf, aby vše „vypadalo hezky“.

Jeden ze základních heuristických přístupů ke kreslení grafů se dá shrnout následovně:

Metoda 8.17. Pružinové kreslení grafu

- Vytvoříme „fyzikální“ model grafu, kde vrcholy budou kuličkami, které se vzájemně odpuzují, a hrany budou pružinami, které své koncové vrcholy vzájemně přitahují. □
- Náš model budeme iterovat jako dynamický systém, až do konvergence pozic vrcholů. Zde je potřebné modelovat i „tlumení“ pohybů vrcholů, aby nedošlo k rozkmitání systému. □
- I když kreslíme graf do roviny, je užitečné začít modelovat systém s dimenzí navíc (aby měly vrcholy „více místa k pohybu“) a teprve v průběhu času dodatečnou silou přidanou dimenzi „eliminovat“, neboli zkonvergovat pozice vrcholů do zvolené roviny.