

4. Bodové a intervalové odhady parametrů a parametrických funkcí

4.1. Motivace: Vycházíme z náhodného výběru X_1, \dots, X_n z rozložení $L(\vartheta)$, které závisí na parametru ϑ . Parametr ϑ neznáme a chceme ho odhadnout pomocí daného náhodného výběru (případně chceme odhadnout nějakou parametrickou funkci $h(\vartheta)$).

Bodovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ je statistika $T_n = T(X_1, \dots, X_n)$, která nabývá hodnot blízkých $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv.

Existují různé metody, jak konstruovat bodové odhady (např. metoda momentů či metoda maximální věrohodnosti) a také různé typy bodových odhadů.

Omezíme se na odhady nestranné, asymptoticky nestranné a konzistentní.

Intervalovým odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$ rozumíme interval (D, H) ,

jehož meze jsou statistiky $D = D(X_1, \dots, X_n)$, $H = H(X_1, \dots, X_n)$ a který s dostatečně velkou pravděpodobností pokrývá $h(\vartheta)$, ať je hodnota parametru ϑ jakákoliv.

4.2. Definice: Definice parametrického prostoru a parametrické funkce

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$. Množina všech hodnot, jichž může parametr ϑ nabývat, se nazývá **parametrický prostor** a značí se Ξ . Libovolná funkce $h(\vartheta)$ se nazývá **parametrická funkce**.

4.3. Definice: Definice nestranného odhadu, lepšího nestranného odhadu, posloupnosti asymptoticky nestranných odhadů a konzistentních odhadů
Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, $h(\vartheta)$ je parametrická funkce,

T, T_1, T_2, \dots jsou statistiky.

a) Řekneme, že statistika T je **nestranným odhadem parametrické funkce $h(\vartheta)$** , jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi \quad E(T) = h(\vartheta).$$

(Význam nestrannosti spočívá v tom, že odhad T nesmí parametrickou funkci $h(\vartheta)$ systematicky nadhodnocovat ani podhodnocovat. Nemá-li tato podmínka splněna, jde o vychýlený odhad.)

b) Jsou-li T_1, T_2 nestranné odhady téže parametrické funkce $h(\vartheta)$, pak řekneme, že **T_1 je lepší odhad než T_2** , jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi \quad D(T_1) < D(T_2).$$

c) Posloupnost T_n se nazývá **posloupnost asymptoticky nestranných odhadů parametrické funkce $h(\vartheta)$** , jestliže

$$\forall \vartheta \in \Xi \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E(T_n) = h(\vartheta).$$

(Význam asymptotické nestrannosti spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá vychýlení odhadu.)

d) Posloupnost $\hat{\theta}_n$ se nazývá **posloupnost konzistentních odhadů parametrické funkce $h(\theta)$** , jestliže

$$\forall \epsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}_n - \theta| > \epsilon) = 0.$$

(Význam konzistence spočívá v tom, že s rostoucím rozsahem výběru klesá pravděpodobnost, že odhad se bude realizovat „daleko“ od parametrické funkce $h(\theta)$.)

4.4. Důsledek: Vztah mezi jednotlivými typy bodových odhadů

Lze dokázat, že z nestrannosti odhadu vyplývá jeho asymptotická nestrannost a z asymptotické nestrannosti vyplývá konzistence, pokud posloupnost rozptylů odhadu konverguje k nule.

4.5. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho náhodného výběru.

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ , rozptylem σ^2 a distribuční funkcí $\Phi(x)$. Nechť $n \geq 2$. Označme M_n výběrový průměr, S_n^2 výběrový rozptyl a pro libovolné, ale pevně dané $x \in \mathcal{X}$ označme $F_n(x)$ hodnotu výběrové distribuční funkce. Pak pro libovolné hodnoty parametrů μ, σ^2 a libovolnou hodnotu distribuční funkce $\Phi(x)$ platí:

a) M_n je nestranným odhadem μ (tj. $E(M_n) = \mu$) s rozptylem $D(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$,

b) S_n^2 je nestranným odhadem σ^2 (tj. $E(S_n^2) = \sigma^2$) s rozptylem $D(S_n^2) = \frac{\gamma_4 - \sigma^4}{n}$, kde γ_4 je 4. centrální moment

c) pro libovolné, ale pevně dané $x \in \mathcal{X}$ je výběrová distribuční funkce $F_n(x)$ nestranným odhadem $\Phi(x)$ (tj. $E(F_n(x)) = \Phi(x)$) s rozptylem

$$D(F_n(x)) = \frac{\Phi(x)(1-\Phi(x))}{n}.$$

d) Posloupnost $\hat{\mu}_n$ je posloupnost asymptoticky nestranných a konzistentních odhadů μ ,

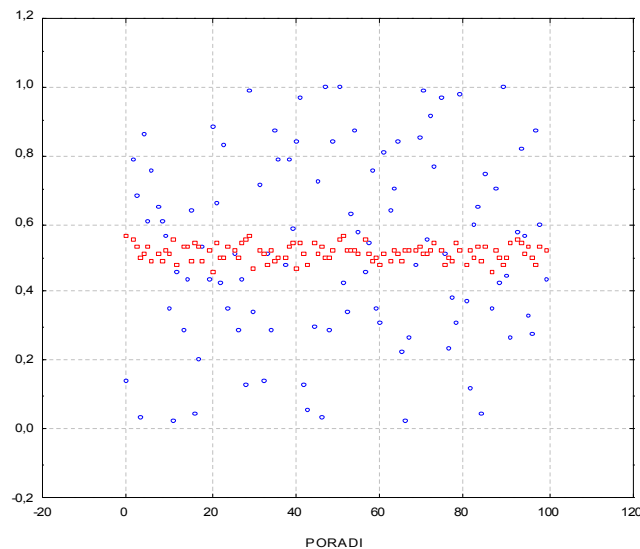
e) $\hat{\sigma}_n^2$ je posloupnost asymptoticky nestranných a konzistentních odhadů σ^2 ,

f) pro libovolné, ale pevně dané $x \in \mathcal{X}$ je $\hat{F}_n(x)$ posloupnost asymptoticky nestranných a konzistentních odhadů $\Phi(x)$.

4.6. Poznámka: Výběrová směrodatná odchylka S není nestranným odhadem směrodatné odchylky σ . To by platilo, pokud S by byla náhodná veličina s degenerovaným rozložením, tj. nabývala by pouze konstantní hodnoty. Pak totiž $D(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 = \sigma^2 - [\sigma]^2 = 0$.

Ilustrace:

Vlastnosti výběrového průměru a výběrového rozptylu budeme ilustrovat na náhodném výběru rozsahu 100 z rozložení $R_s(0,1)$. V tomto případě $E(X_i) = 1/2$, $D(X_i) = 1/12$, $i = 1, \dots, 100$. Pomocí systému STATISTICA vygenerujeme pro každou z náhodných veličin X_1, \dots, X_{100} 100 realizací a uložíme je do proměnných v_1, \dots, v_{100} . Dále vypočítáme průměr a rozptyl těchto realizací, uložíme je do proměnných PRUMER a ROZPTYL. Graficky znázorníme hodnoty některé z proměnných v_1, \dots, v_{100} (např. v_1) a hodnoty proměnné PRUMER:



Vidíme, že hodnoty proměnné v_1 kolísají od 0 do 1, zatímco hodnoty proměnné PRUMER se nacházejí v úzkém pásu kolem $1/2$.

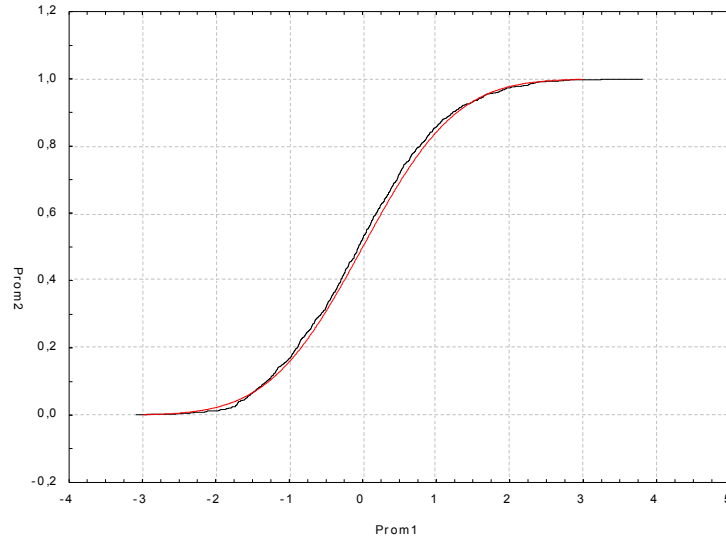
Dále vypočteme průměr a rozptyl např. proměnné v_1 a proměnné PRUMER a dále vypočtete průměr proměnné ROZPTYL.

Proměnná	Popisné statistiky (uniform)	
	Průměr	Rozptyl
Prom1	0,536605	0,078676
PRUMER	0,503984	0,000783

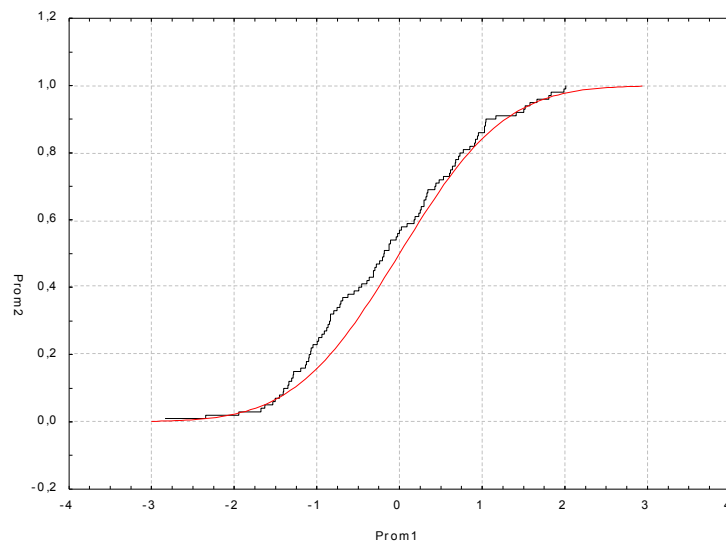
Proměnná	Popisné statistiky (uniform)
	Průměr
ROZPTYL	0,083143

Průměr proměnné v_1 by měl být blízký $0,5$, rozptyl $1/12 = 0,083$. Průměr proměnné PRUMER by se měl blížit $0,5$, zatímco rozptyl by měl být $n = 100$ x menší než $1/12$, tj. $0,00083$. Dále průměr proměnné ROZPTYL by se měl blížit $1/12 = 0,083$.

Nestrannost výběrové distribuční funkce budeme ilustrovat na náhodném výběru rozsahu 1000 z rozložení $N(0,1)$. Získáme výběrovou distribuční funkci tohoto výběru a její graf porovnáme s grafem distribuční funkce náhodné veličiny se standardizovaným normálním rozložením. Graf výběrové distribuční funkce má černou barvu, graf distribuční funkce standardizovaného normálního rozložení má červenou barvu.



Průběh výběrové distribuční funkce $F_{1000}(x)$ je velmi podobný průběhu distribuční funkce $\Phi(x)$. Pokud bychom postup zopakovali s podstatně menším rozsahem náhodného výběru (např. $n = 100$), průběh obou funkcí by se lišil výrazněji:



4.7. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z $r \geq 2$ nezávislých náhodných výběrů.

Nechť $X_{11}, \dots, X_{1n_1}, \dots, X_{r1}, \dots, X_{rn_r}$ je r stochasticky nezávislých náhodných výběrů o rozsazích $n_1 \geq 2, \dots, n_r \geq 2$ z rozložení se středními hodnotami μ_1, \dots, μ_r a rozptylem σ^2 . Celkový rozsah je $n = \sum_{j=1}^r n_j$. Necht' c_1, \dots, c_r jsou reálné

konstanty, aspoň jedna nenulová. Označme $\sum_{j=1}^r c_j M_j$ lineární kombinaci

výběrových průměrů a $s_*^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n-1}$ vážený průměr výběrových rozptylů.

Pak pro libovolné hodnoty parametrů μ_1, \dots, μ_r a σ^2 platí:

$$E\left(\sum_{j=1}^r c_j M_j\right) = \sum_{j=1}^r c_j \mu_j,$$

$$E(S_*^2) = \sigma^2.$$

Znamená to, že lineární kombinace výběrových průměrů $\sum_{j=1}^r c_j M_j$ je nestranným

odhadem lineární kombinace středních hodnot $\sum_{j=1}^r c_j \mu_j$ a vážený průměr

výběrových rozptylů $s_*^2 = \frac{\sum_{j=1}^r (\bar{x}_j - \bar{x})^2}{n-1}$ je nestranným odhadem rozptylu σ^2 .

4.8. Věta: Věta o vlastnostech bodových odhadů odvozených z jednoho dvourozměrného náhodného výběru.

Nechť $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ je náhodný výběr z dvourozměrného rozložení s kovariancí σ_{12} a koeficientem korelace ρ . Označme S_{12} výběrovou kovariancí a R_{12} výběrový koeficient korelace. Pak pro libovolné hodnoty parametrů σ_{12} a ρ platí:

$$E(S_{12}) = \sigma_{12},$$

$$E(R_{12}) \approx \rho \text{ (shoda je vyhovující pro } n \geq 30\text{)}.$$

Znamená to, že výběrová kovariance S_{12} je nestranným odhadem kovariance σ_{12} , avšak výběrový koeficient korelace R_{12} je vychýleným odhadem koeficientu korelace ρ .

4.9. Definice: Definice intervalu spolehlivosti

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $L(\theta)$, $h(\theta)$ je parametrická funkce, $\alpha \in (0,1)$, $D = D(X_1, \dots, X_n)$, $H = H(X_1, \dots, X_n)$ jsou statistiky.

a) Interval (D, H) se nazývá **100(1- α)% (oboustranný) interval spolehlivosti** pro parametrickou funkci $h(\theta)$, jestliže: $\forall \theta \in \Theta \quad P(D < h(\theta) < H) \geq 1-\alpha$.

b) Interval (D, ∞) se nazývá **100(1- α)% levostranný interval spolehlivosti** pro parametrickou funkci $h(\theta)$, jestliže: $\forall \theta \in \Theta \quad P(D < h(\theta)) \geq 1-\alpha$.

c) Interval $(-\infty, H)$ se nazývá **100(1- α)% pravostranný interval spolehlivosti** pro parametrickou funkci $h(\theta)$, jestliže: $\forall \theta \in \Theta \quad P(h(\theta) < H) \geq 1-\alpha$.

Číslo α se nazývá **riziko** (zpravidla $\alpha = 0,05$, méně často 0,1 či 0,01), číslo $1 - \alpha$ se nazývá **spolehlivost**.

4.10. Poznámka: Doporučený postup při konstrukci intervalu spolehlivosti

a) Vyjdeme ze statistiky V , která je nestranným bodovým odhadem parametrické funkce $h(\theta)$.

b) Najdeme tzv. pivotovou statistiku W , která vznikne transformací statistiky V , je monotónní funkcí $h(\vartheta)$ a přitom její rozložení je známé a na $h(\vartheta)$ nezávisí. Pomocí známého rozložení pivotové statistiky W najdeme kvantily $w_{\alpha/2}$,

$w_{1-\alpha/2}$, takže platí:

$$\forall \vartheta \in \mathcal{Z} : P(w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}) \geq 1 - \alpha.$$

c) Nerovnost $w_{\alpha/2} < W < w_{1-\alpha/2}$ převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost $D < h(\vartheta) < H$.

d) Statistiku D , H nahradíme jejich číselnými realizacemi d , h a získáme tak $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti, o němž prohlásíme, že pokrývá $h(\vartheta)$ s pravděpodobností aspoň $1 - \alpha$. (Tvrzení, že (d, h) pokrývá $h(\vartheta)$ s pravděpodobností aspoň $1 - \alpha$ je třeba chápat takto: jestliže mnohonásobně nezávisle získáme realizace x_1, \dots, x_n náhodného výběru X_1, \dots, X_n z rozložení $L(\vartheta)$ a pomocí každé této realizace sestrojíme $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $h(\vartheta)$, pak podíl počtu těch intervalů, které pokrývají $h(\vartheta)$ k počtu všech sestrojených intervalů bude přibližně $1 - \alpha$.)

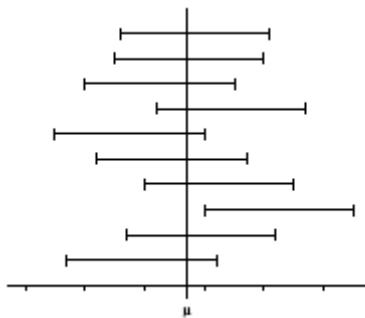
(Volba oboustranného, jednostranného, nebo pravostranného intervalu závisí na konkrétní situaci. Např. oboustranný interval spolehlivosti použije konstruktér, kterého zajímá dolní i horní hranice pro skutečnou délku μ nějaké součástky.

Levostranný interval spolehlivosti použije výkupčí drahých kovů, který potřebuje znát dolní mez pro skutečný obsah zlata μ v kupovaném slitku.

Pravostranný interval spolehlivosti použije chemik, který potřebuje znát horní mez pro obsah nečistot μ v analyzovaném vzorku.)

Ilustrace:

Jestliže 100x nezávisle na sobě uskutečnime náhodný výběr z rozložení se střední hodnotou μ a pokaždé sestrojíme 95% empirický interval spolehlivosti pro μ , pak přibližně v 95-ti případech bude ležet parametr μ v intervalech spolehlivosti a asi v 5-ti případech interval spolehlivosti μ nepokryje.



4.11. Příklad: Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde $n \geq 2$ a rozptyl σ^2 známe. Sestrojte $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ .

Řešení: V tomto případě parametrická funkce $h(\vartheta) = \mu$. Nestranným odhadem střední hodnoty je výběrový průměr $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$. Protože M je lineární kombinací normálně rozložených náhodných veličin, bude mít také normální rozložení se střední hodnotou $E(M) = \mu$ a rozptylem $D(M) = \frac{\sigma}{n}$. Pivotalovou statistikou W bude standardizovaná náhodná veličina $U = \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$.

Kvantil $w_{\alpha/2} = u_{\alpha/2} = -u_{1-\alpha/2}$, $w_{1-\alpha/2} = u_{1-\alpha/2}$.

$\forall \epsilon \in \mathbb{R} : 1 - \alpha \leq P(-u_{1-\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) =$

$$P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) = P\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} < \mu < M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right).$$

Meze $100(1-\alpha)\%$ intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptyle σ^2 tedy jsou:

$$D = M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, H = M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Při konstrukci jednostranných intervalů spolehlivosti se riziko nepůlí, tedy

$100(1-\alpha)\%$ levostranný interval spolehlivosti pro μ je $\left(M - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ a

pravostranný je

$$\left(-\infty, M + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right).$$

Dosadíme-li do vzorců pro dolní a horní mez číselnou realizaci m výběrového průměru M , dostaneme $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti.

4.12. Příklad: 10 krát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ .

Výsledky měření byly: 2,1, 1,8, 2,1, 2,4, 1,9, 2,1, 2,1, 1,8, 2,3, 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru X_1, \dots, X_{10} z rozložení $N(\mu, 0,04)$, kde parametr μ neznáme. Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro μ , a to

- oboustranný,
- levostranný,
- pravostranný.

Řešení: $m = 2,06$, $\sigma^2 = 0,04$, $\sigma = 0,2$, $\alpha = 0,05$, $u_{0,975} = 1,96$, $u_{0,95} = 1,64$.

ad a) $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2,06 - \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,96 = 1,94$

$$h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2} = 2,06 + \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,96 = 2,18$$

$1,94 < \mu < 2,18$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

$$\text{ad b) } d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2,06 - \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,64 = 1,96$$

$1,96 < \mu$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

$$\text{ad c) } h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha} = 2,06 + \frac{0,2}{\sqrt{10}} 1,64 = 2,16$$

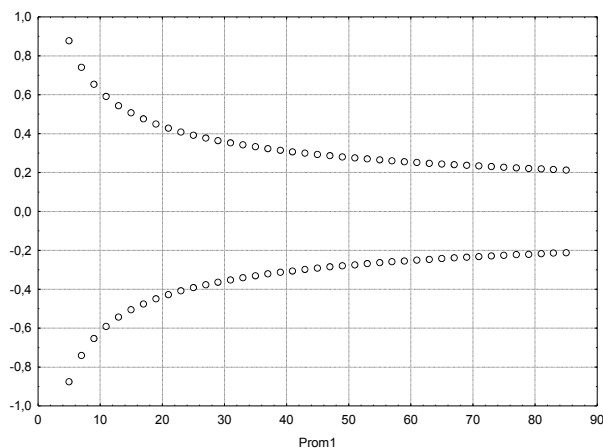
$\mu < 2,16$ s pravděpodobností aspoň 0,95.

4.13. Poznámka: (o šířce intervalu spolehlivosti) Necht' (d, h) je $100(1-\alpha)\%$ empirický interval spolehlivosti pro $h(\vartheta)$ zkonstruovaný pomocí číselných realizací x_1, \dots, x_n náhodného výběru X_1, \dots, X_n z rozložení $L(\vartheta)$.

- Při konstantním riziku klesá šířka $h-d$ s rostoucím rozsahem náhodného výběru.
- Při konstantním rozsahu náhodného výběru klesá šířka $h-d$ s rostoucím rizikem.

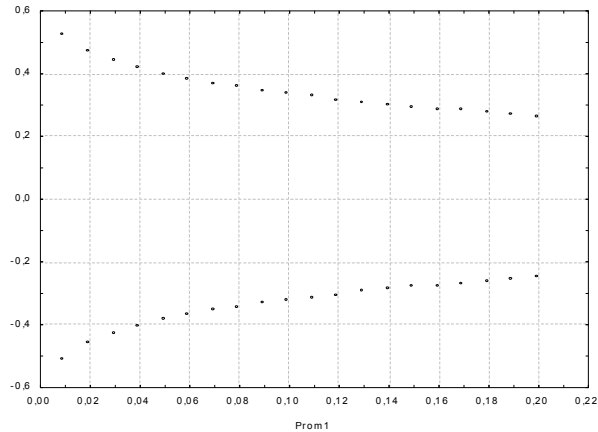
Ilustrace:

ad a) Grafické znázornění závislosti dolních a horních meze 95% empirických intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozložení při známém rozptylu na rozsahu náhodného výběru:



Vidíme, že šířka intervalu spolehlivosti klesá se zvětšujícím se rozsahem náhodného výběru, zprvu rychle a pak stále pomaleji.

ad b) Grafické znázornění závislosti dolních a horních mezí $100(1-\alpha)\%$ empirických intervalů spolehlivosti pro střední hodnotu normálního rozložení při známém rozptylu a konstantním rozsahu výběru na riziku:



Vidíme, že šířka intervalu spolehlivosti s rostoucím rizikem klesá.

4.14. Příklad: (stanovení minimálního rozsahu výběru z normálního rozložení)
 Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z $N(\mu, \sigma^2)$, kde σ^2 známe. Jaký musí být minimální rozsah výběru n , aby šířka 100(1- α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ nepřesáhla číslo Δ ?

Řešení: Požadujeme, aby $\Delta \geq h - d = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}} - (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

Z této podmínky dostaneme, že $n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2}$. Za rozsah výběru zvolíme

nejmenší přirozené číslo vyhovující této podmínce.

Odvozený vzorec použijeme v této situaci: v příkladu 4.12. (a) se uživateli zdá 95% empirický interval spolehlivosti (1,94; 2,18) pro střední hodnotu μ příliš široký. Přál by si, aby šířka 95% empirického intervalu spolehlivosti nepřesáhla číslo 0,16. Dostáváme tedy

$$n \geq \frac{4\sigma^2 u_{1-\frac{\alpha}{2}}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,04 \cdot u_{0,975}^2}{0,16^2} = \frac{4 \cdot 0,04 \cdot 1,96^2}{0,16^2} = 24,01. \text{ Podmínku tedy splňuje}$$

číslo 25.