

1 Rovnice a nerovnice

Řešte rovnice, resp. nerovnice:

1. $|x - 4| + |2x - 1| = |x| + 3$

$$[x \in \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle]$$

2. $x^2 + |x - 1| - 1 = 0$

$$[x \in \{0, 1\}]$$

3. $|x^2 + 4x| - 3x - 6 = 0$

$$[x \in \{-1, 2\}]$$

4. $|2x + 1| - |3 - x| \geq x$

$$[x \in (-\infty, -2) \cup (1, \infty)]$$

5. $|x - 2| > 3|x - 4|$

$$[x \in (\frac{7}{2}, 5)]$$

6. $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

$$[x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$$

7. soustava nerovnic

$$|x - 3| + 2|x + 1| > 4$$

$$|2x + 1| - 5 \leq x$$

$$[x \in \langle -2, -1 \rangle \cup (-1, 4)]$$

8. $x^2 + 2x - 1 = 0$

$$[x = -1 \pm \sqrt{2}]$$

9. $x^2 + x(2\sqrt{3} + 1) + 2\sqrt{3} = 0$

$$[x \in \{-1, -2\sqrt{3}\}]$$

10. $3x^2 + 5x - 2 < 0$

$$[x \in (-2, \frac{1}{3})]$$

11. $9x^2 - 6x + 1 \leq 0$

$$[x = \frac{1}{3}]$$

$$12. 4x^2 - 1 \leq 0$$

$$[x \in \langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle]$$

$$13. \frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}} - \frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}} = \frac{3}{x}$$

$$[x \in \{-1, \frac{9}{16}\}]$$

$$14. 2 \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \sqrt{x+1} - \frac{(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{x-1})^2}{\sqrt{x-1}} = 0$$

$$[x \in (1, \infty)]$$

2 Matematická indukce

Pomocí matematické indukce dokažte:

$$1. 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$2. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$3. 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

3 Kořeny polynomu - Hornerovo schéma

Rozložte polynomy pomocí Hornerova schématu:

$$1. x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 32x^2 - 54x + 36 = ?$$

$$[= (x-2)(x-3)(x+3)(x^2-2x+2)]$$

$$2. x^5 - 19x^4 + 130x^3 - 400x^2 + 544x - 256 = ?$$

$$[= (x-1)(x-2)(x-4)^2(x-8)]$$

$$3. x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = ?$$

$$[= (x-1)^2(x-2)^2]$$

4 Dělení polynomu polynomem

Napište racionální lomenou funkci jako součet polynomu a ryze lomené funkce (dělte polynomy):

1. $(x^5 - x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3) = ?$

$$\left[= (x + 1) + \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} \right]$$

2. $(x^4 + 6x^2 + x - 2) \div (x^4 - 2x^3) = ?$

$$\left[= 1 + \frac{2x^3 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} \right]$$

3. $(2x^5 - x^4 + 3x^2 - x + 1) \div (x^2 - 2x + 4) = ?$

$$\left[= 2x^3 + 3x^2 - 2x - 13 + \frac{-19x + 53}{x^2 - 2x + 4} \right]$$

5 Rozklad na parciální zlomky

Rozložte ryze lomené funkce na parciální zlomky:

1. $\frac{-5x+2}{x^4-x^3+2x^2} = ?$

$$\left[= \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{2x-3}{x^2-x+2} \right]$$

2. $\frac{9x^3-4x+1}{x^4-x^2} = ?$

$$\left[= \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} + \frac{4}{x} \right]$$

3. $\frac{x^3-4x^2+x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = ?$

$$\left[= \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{(x-1)^2} \right]$$

6 Definiční obor funkce

Zjistěte definiční obor funkcí:

1. $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$

$$[D(f) = \mathbb{R}]$$

2. $y = \frac{1}{|x+3|-4}$

$$[D(f) = \mathbb{R} - \{-7, 1\}]$$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x-2}}$

$$[D(f) = (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty)]$$

4. $y = \sqrt{\frac{x+2}{4x-6}}$

$$[D(f) = (-\infty, -2) \cup (\frac{3}{2}, \infty)]$$

5. $y = \log(x-3)$

$$[D(f) = (3, \infty)]$$

6. $y = \frac{1}{\log_2(x+4)-3}$

$$[D(f) = (-4, 4) \cup (4, \infty)]$$

7. $y = \sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(2x+1)}$

$$[D(f) = (-\frac{1}{2}, 0)]$$

8. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$

$$[D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 4k^2\pi^2, (2k+1)^2\pi^2 \rangle]$$

9. $y = \sqrt[4]{\log(tg(x))}$

$$[D(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi + \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2})]$$

7 Sudost a lichost funkce

Rozhodněte, zda je funkce sudá či lichá:

1. $y = (x + 1)^2$

[ani sudá, ani lichá]

2. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$

[sudá]

3. $y = \frac{1+x}{1+x^2}$

[ani sudá, ani lichá]

4. $y = \log \frac{1-x}{1+x}$

[lichá]

5. $y = 0$

[sudá i lichá]

8 Inverzní funkce

Spočtěte inverzní funkci:

1. $y = \frac{3}{4}x - 1$

$$\left[y = \frac{4x+4}{3} \right]$$

2. $y = 10^{x-3}$

$$\left[y = 3 + \log_{10} x \right]$$

3. $y = 1 - \sin(x-1)$

$$\left[y = 1 + \arcsin(1-x) \right]$$

9 Grafy funkcí

Načrtněte grafy funkcí:

1. $y = 2|x - 3| + 1$

2. $y = |4 - x| - |2x + 3| - 7$

3. $y = 8x - 2x^2$

4. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - 1$

5. $y = |x^2 + 2x - 3|$

6. $y = x|x - 3|$

7. $y = \frac{1}{x}$

10 Supremum a infimum

Nalezněte infima a suprema množin:

1. $X = \{-x^2 + 6x + 1, x \in \mathbb{R}\}$

$$[\inf(X) \text{ neexistuje, } \sup(X) = 10]$$

2. $X = \{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \dots\}$

$$[\inf(X) = 0, \sup(X) = 1]$$

3. $X =$ množina všech zlomků tvaru $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < m < n$

$$[\inf(X) = 0, \sup(X) = 1]$$

11 Limita posloupnosti

Spočtěte limity posloupností:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}$ [0]

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}$ [∞]

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n + 1}$ [∞]

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}}$ [0]

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ [0]

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ [0]

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^2(1-4n)(n+1)}{2n^4-100n^3}$ [-2]

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5+(-1)^n \cdot n}{n+2}$ [neexistuje]

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n})$ [1]

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} n\left(\sqrt{a + \frac{1}{n}} - \sqrt{a}\right)$ $\left[\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$

12 Limita funkce

Spočtěte limity funkcí:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin x$
(Rada: Využijte větu o limitě součinu ohraničené funkce a funkce s nulovou limitou.)

[0]

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$

$[-\frac{1}{2}]$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3})$

$[\frac{5}{2}]$

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}$

$[\frac{1}{4}]$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x^4}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1}$

(Rada: Využijte vzoreček $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.)

$[-3]$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x), a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$

$[\frac{a+b}{2}]$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$

$[\frac{1}{4\sqrt{2}}]$

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

$[\frac{1}{2}]$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x}$

(Rada: Pomožte si substitucí $x = \tan t$. Nezapomeňte zaměnit $\lim_{x \rightarrow 0}$ za $\lim_{t \rightarrow \dots}$.)

[1]

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$
 (Rada: Pomožte si substitucí $1+x = e^t$. Nezapomeňte zaměnit $\lim_{x \rightarrow 0}$ za $\lim_{t \rightarrow \dots}$.)

[1]

11. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2}$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2|}{x-2}$

[-1; 1]

12. * $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

[1]

13. * $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-2x}}{x^2+x}$

[$\frac{1}{2}$]

14. * $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

[$\frac{1}{\sqrt{2}}$]

15. * $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x, a \in \mathbb{R}$
 (Rada: Pomožte si substitucí $\frac{1}{y} = \frac{a}{x}$ a vyjádřením Eulerova čísla $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$. Nezapomeňte zaměnit $\lim_{x \rightarrow 0}$ za $\lim_{y \rightarrow \dots}$.)

[e^a]

13 Spojitost funkce

1. Buď $f(x) = \begin{cases} -2 \sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A \sin x + B & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$.

Určete parametry A, B tak, aby byla funkce f spojitá ve všech bodech $x \in \mathbb{R}$.

[$A = -1, B = 1$]

14 Derivace

Zderivujte funkce:

$$1. y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)$$

$$\left[y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \right]$$

$$2. y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$$

$$\left[y' = \frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x}{\cos^2 x} \right]$$

$$3. y = \sin(\sin(\sin x))$$

$$[y' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x]$$

$$4. y = \ln(\sqrt{1 + e^{2x}})$$

$$\left[y' = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} \right]$$

$$5. y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\left[y' = -\frac{\sqrt{2} \sin 2x}{2\sqrt{1 + \cos 2x}} \right]$$

$$6. y = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 x}{2}}$$

$$\left[y' = -\frac{\sqrt{2} \sin x \cos x}{2\sqrt{1 + \cos^2 x}} \right]$$

$$7. y = \sqrt{\frac{1 - e^x}{1 + e^x}}$$

$$\left[y' = -\frac{e^x}{(1 + e^x)\sqrt{1 - e^{2x}}} \right]$$

$$8. y = \sqrt{\arctan \frac{x+1}{2x+1} - \frac{\pi}{4}}$$

$$\left[y' = -\frac{1}{2((2x+1)^2 + (x+1)^2)\sqrt{\arctan \frac{x+1}{2x+1} - \frac{\pi}{4}}} \right]$$

$$9. * y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\left[y' = \frac{1}{x^3 + 1} \right]$$

$$10. * y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$$

$$\left[y' = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right]$$

$$11. * y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2}-x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2}+x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$$

$$\left[y' = \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \right]$$

Vypočtěte n -tou derivaci funkcí:

$$1. y = x \ln x, n = 5$$

$$[y^{(V)} = -6x^{-4}]$$

$$2. y = x^2 e^x, n = 4$$

$$[y^{(IV)} = 12e^x + 8xe^x + x^2e^x]$$

15 Tečna a normála

Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkcí v bodě x_0 :

$$1. y = \tan x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$[t : y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2}, n : y = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{\pi}{8}]$$

$$2. y = \frac{1}{x^2+1}, x_0 = 1$$

$$[t : y = -\frac{1}{2}x + 1, n : y = 2x - \frac{3}{2}]$$

$$3. y = 2x^3 + 1, x_0 = 0$$

$$[t : y = 1, n : x = 0]$$

$$4. y = 2\sqrt{2} \sin x, x_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$[t : y = 2x + 2 - \frac{\pi}{2}, n : y = -\frac{1}{2}x + 2 + \frac{\pi}{8}]$$

$$5. y = e^{\tan x}, x_0 = 0$$

$$[t : y = x + 1, n : y = -x + 1]$$

16 Vyšetřování průběhu funkce

16.1 Monotonie

Určete intervaly, na nichž jsou funkce rostoucí, resp. klesající:

1. $y = \frac{2x}{1+x^2}$

$$[R : (-1, 1), K : (-\infty - 1), (1, \infty)]$$

2. $y = x^2 - \ln x^2$

$$[R : (-1, 0), (1, \infty), K : (-\infty, -1), (0, 1)]$$

3. $y = \frac{x}{\ln x}$

$$[R : (e, \infty), K : (0, 1), (1, e)]$$

16.2 Extrémy

Určete lokální extrémy funkcí:

1. $y = x - 2 \arctan x$

$$[max : [-1, -1 + \frac{\pi}{2}], min : [1, 1 - \frac{\pi}{2}]]$$

2. $y = \ln \cos x$

$$[max : [2k\pi, 0], k \in \mathbb{Z}]$$

3. Určete hodnotu parametru $a \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f(x) = a \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ měla v bodě $x = \frac{\pi}{3}$ extrém.

$$[a = 2]$$

Určete globální extrémy funkcí na daném intervalu:

1. $y = x - 1 - \sqrt{x}$, $I = \langle 0, 1 \rangle$

$$[max : [0, -1], [1, -1], min : [\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}]]$$

2. $y = x + \arctan x$, $I = \langle -1, 1 \rangle$

$$[max : [1, 1 + \frac{\pi}{2}], min : [-1, -1 - \frac{\pi}{2}]]$$

Pomocí globálních extrémů funkcí nalezněte řešení úlohy:

1. * Kladné číslo a rozložte na součet dvou nezáporných sčítanců tak, aby jejich součin byl maximální.

$$\left[a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right]$$

2. * Určete poměr stran obdélníka, pro nějž platí, že při daném obsahu má nejmenší obvod.
(pozn. $S = ab$, $o = 2(a + b)$)

$$[a = b, \text{ tj. čtverec }]$$

3. * Určete poměr poloměru a výšky rotačního válce, pro nějž platí, že při daném povrchu má největší objem.
(pozn. $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$, $V = \pi r^2 v$)

$$[v = 2r]$$

4. * Určete rozměry válcové nádoby s víkem tak, aby při daném objemu R litrů měla co nejmenší povrch.
(pozn. $S = 2\pi r^2 + 2\pi r v$, $V = \pi r^2 v$)

$$\left[r = \sqrt[3]{\frac{R}{2\pi}} dm, v = \sqrt[3]{\frac{4R}{\pi}} dm \right]$$

5. * Ze čtverce papíru o straně a vystříhnete v rozích čtverce tak, aby krabice složená ze zbytku papíru měla co největší objem. Krabice nemá víko.

$$[\text{ strana čtverců v rozích je } \frac{a}{6}]$$

16.3 Konvexnost, konkávnost, inflexní body

Určete intervaly, na nichž jsou funkce konvexní, resp. konkávní, a určete inflexní body funkcí:

1. $y = e^{-2x^2}$

$$\left[\text{konv} : \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \infty\right), \text{konk} : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{infl} : \left[-\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right], \left[\frac{1}{2}, e^{-\frac{1}{2}}\right] \right]$$

2. $y = xe^{-x}$

$$[\text{konv} : (2, \infty), \text{konk} : (-\infty, 2), \text{infl} : [2, 2e^{-2}]]$$

16.4 Asymptoty

Určete asymptoty funkcí:

1. $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$

[bs : $x = -1$, ss : $y = x - 2$ pro $x \rightarrow \pm\infty$]

2. $y = e^{\left(\frac{1}{x^2-4x+3}\right)}$

[bs : $x = 1, x = 3$, ss : $y = 1$ pro $x \rightarrow \pm\infty$]

16.5 Vyšetřování průběhu funkce

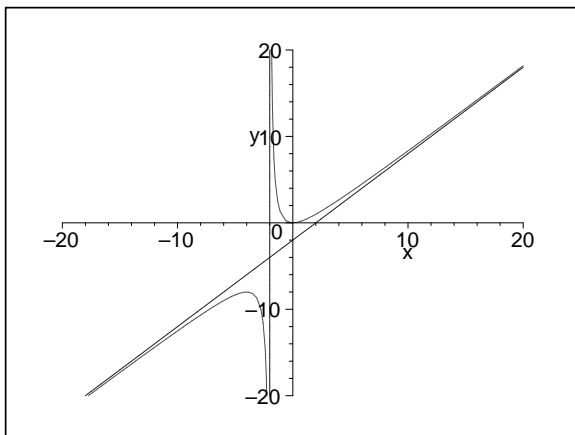
Vyšetřete průběh funkcí (včetně grafu):

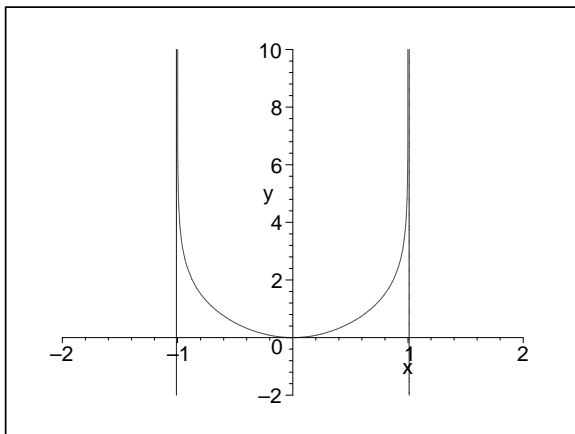
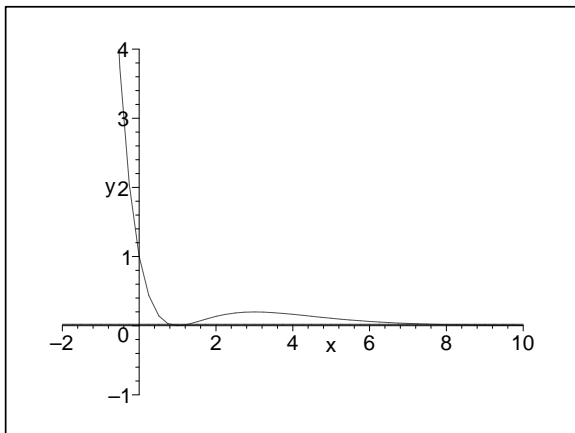
1. $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

2. $f(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

3. $f(x) = \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$

(přímky v grafech značí asymptoty)





17 Přibližné vyjádření funkce

17.1 Diferenciál

Pomocí diferenciálu přibližně určete:

1. $\operatorname{arccotan}(1,02)$

$$\left[\approx \frac{\pi}{4} - 0,01 \approx 0,7754 \text{ pro } f(x) = \operatorname{arccotan}(x), x_0 = 1 \right]$$

2. $\sin 29$

$$\left[\approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,4849 \text{ pro } f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6} \right]$$

3. $\sqrt{5}$

$$\left[\approx \frac{9}{4} = 2.25 \text{ pro } f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4 \right]$$

17.2 Taylorův rozvoj

Napište Taylorův polynom stupně n v bodě x_0 funkcí:

1. $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 1, n = 5$

$$[T_5(x) = 2 + 2(x - 1) + (x - 1)^2]$$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x}, x_0 = 0, n = 4$

$$[T_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4]$$

3. $f(x) = x^3 - 2x + 5, x_0 = 1, n = 6$

$$[T_6(x) = 4 + (x - 1) + 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3]$$

Napište Maclaurinův rozvoj funkcí:

1. $f(x) = \sin x$

$$\left[T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

2. $f(x) = \cos x$

$$\left[T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^n \cos \xi \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \right]$$

3. $f(x) = \ln(x + 1)$

$$\left[T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}} \right]$$

Pomocí Taylorova polynomu stupně n přibližně určete:

1. $\arctan(1,05), n = 2$

$$[\approx 45 + \frac{1}{2}(1,05 - 1) - \frac{1}{4}(1,05 - 1)^2 = 45,0125 \text{ pro } f(x) = \arctan x, x_0 = 1]$$

2. $\ln(1,01), n = 2$

$$[\approx 0,01 - \frac{1}{2} \cdot 0,01^2 = -0,00995 \text{ pro } f(x) = \ln x, x_0 = 1]$$

3. $\sqrt[3]{30}, n = 2$

$$[\approx 3 + \frac{1}{3^3}(30 - 27) - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3^7}(30 - 27)^2 = 3,106995 \text{ pro } f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 27]$$

18 L'Hospitalovo pravidlo

Pomocí l'Hospitalova pravidla spočtěte limity funkcí:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\arcsin x} \quad [1]$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 4x} - \cos x}{\sin 2x} \quad [2]$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \quad [2]$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{a^x}, \quad a > 1 \quad [0]$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x^2)}{\ln(\sin \pi x)} \quad [1]$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) \quad \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \cdot \ln(1-x) \quad [0]$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right) \ln x \quad [0]$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\tan x} \quad [1]$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\tan x} \quad [1]$$

12. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln \frac{1}{x})^x$

[1]

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{2}{\pi} \arctan x)^x$

 $[e^{-\frac{2}{\pi}}]$

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2-1}{x^2})^{x^4}$

[0]

15. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan^2 x)^{\cotan^2 x}$

 $[e^3]$

16. * $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}$

[1]

19 Primitivní funkce

Spočtěte integrály:

1. $\int 3 dx$

 $[3x + c]$

2. $\int x^2 dx$

 $[\frac{x^3}{3} + c]$

3. $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} dx$

 $[\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + c]$

4. $\int \frac{\sqrt{x-2^x} x^3 + 3x^2}{x^3} dx$

 $[-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2^x}{\ln 2} + 3 \ln x + c]$

5. $\int \frac{4x^2+1}{x^2(1+x^2)} dx$

$$\left[-\frac{1}{x} + 3 \arctan x + c\right]$$

6. $\int e^{2x} dx$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x} + c\right]$$

7. $\int \sin kx dx$

$$\left[-\frac{1}{k} \cos kx + c\right]$$

8. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$
(Rada: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.)

$$[2x - \tan x + c]$$

9. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx$

$$\left[\frac{1}{2}(\tan x + x) + c\right]$$

10. $\int 2 \sin^2 \frac{x}{2} dx$
(Rada: $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2}$.)

$$[x - \sin x + c]$$

11. $\int \sin 6x \cos 2x dx$
(Rada: $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$.)

$$\left[-\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{8} \cos 4x + c\right]$$

12. $\int \tan x dx$

$$[-\ln |\cos x| + c]$$

13. $\int \frac{x}{x^2+a^2} dx$

$$\left[\frac{1}{2} \ln |x^2 + a^2| + c\right]$$

14. $\int \left(\frac{5}{2\sqrt{x^2-3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^x\right) dx$

$$\left[\frac{5}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 3}| - \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} + c\right]$$

19.1 Metoda Per partes

Spočtete integrály:

1. $\int (x^2 + x)e^x dx$

$$[e^x(x^2 - x + 1) + c]$$

2. $\int x^3 e^{2x} dx$

$$[e^{2x}(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{3}{8}) + c]$$

3. $\int (x^3 + x^2)3^x dx$

$$[3^x(\frac{x^3+x^2}{\ln 3} - \frac{3x^2+2x}{\ln^2 3} + \frac{6x+2}{\ln^3 3} - \frac{6}{\ln^4 3}) + c]$$

4. $\int x \cos 2x dx$

$$[\frac{x}{2} \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + c]$$

5. $\int \arctan x dx$

$$[x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c]$$

6. $\int e^x \cos x dx$

$$[\frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c]$$

7. $\int e^{2x} \sin x dx$

$$[\frac{1}{5}e^x(2 \sin x - \cos x) + c]$$

8. $\int \sin^2 x \cos x dx$

$$[\frac{1}{3} \sin^3 x + c]$$

9. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

$$[-\frac{\ln^2 x + 2 \ln x + 2}{x} + c]$$

19.2 Substituční metoda

Spočtete integrály:

$$1. \int x e^{x^2} dx$$

$$\left[\frac{1}{2} e^{x^2} + c, \text{ substitute } t = x^2 \right]$$

$$2. \int \frac{dx}{x \ln^2 x}$$

$$\left[-\frac{1}{\ln x} + c, \text{ substitute } t = \ln x \right]$$

$$3. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$$

$$\left[\frac{1}{4} \sqrt[3]{(1+x^3)^4} + c, \text{ substitute } t = 1+x^3 \right]$$

$$4. \int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\left[-\frac{\arccos^3 x}{3} + c, \text{ substitute } t = \arccos x \right]$$

$$5. \int x^2 \arccos x dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9} \sqrt{(1-x^2)^3} + c, PP + \right. \\ \left. \text{subs. } t = 1-x^2 \right]$$

$$6. \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$\left[\arcsin \frac{x}{a} + c, \text{ substitute } t = \frac{x}{a} \right]$$

$$7. \int \frac{1}{x^2+9} dx$$

$$\left[\frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + c, \text{ substitute } t = \frac{x}{3} \right]$$

$$8. \int -\frac{1}{\sqrt{16-x^2}} dx$$

$$\left[\arccos \frac{x}{4} + c, \text{ substitute } t = \frac{x}{4} \right]$$

$$9. \int \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\left[\frac{1}{2} (\arcsin x + x \sqrt{1-x^2}) + c, \text{ substitute } x = \sin t \right]$$

$$10. \int \arctan \sqrt{x} dx$$

$$\left[(x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + c, \text{ substitute } x = t^2 + PP \right]$$

19.3 Integrovaní některých elementárních funkcí

19.3.1 Racionální funkce

Spočtěte integrály:

$$1. \int \frac{x}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$$

$$\left[-\frac{1}{3} \ln |x - 1| - \frac{1}{6} \ln |x + 2| + \frac{1}{2} \ln |x - 2| + c \right]$$

$$2. \int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6 \sin x + 5} dx$$

$$\left[\frac{1}{4} \ln |1 + \sin x| - \frac{1}{4} \ln |5 + \sin x| + c, \text{ nejprv substituce } t = \sin x \right]$$

$$3. \int \frac{x^4 + 6x^2 + x - 2}{x^4 - 2x^3} dx$$

$$\left[x - \frac{1}{2x^2} - 3 \ln |x| + 5 \ln |x - 2| + c \right]$$

$$4. \int \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x} dx$$

$$[\ln |x| + \arctan x + c]$$

$$5. \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$[x + \operatorname{arccotan} x + c]$$

$$6. \int \frac{2x^3 + 8x^2 + 12x + 1}{x^2 + 4x + 6} dx$$

$$\left[x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x+2}{\sqrt{2}} + c \right]$$

$$7. \int \frac{4x - 10}{x^2 - 6x + 25} dx$$

$$\left[2 \ln |x^2 - 6x + 25| + \frac{1}{2} \arctan \frac{x-3}{4} + c \right]$$

$$8. \int \frac{4x - 5}{x^2 + 4x + 7} dx$$

$$\left[2 \ln |x^2 + 4x + 7| + \frac{13}{\sqrt{3}} \operatorname{arccotan} \frac{x+2}{\sqrt{3}} + c \right]$$

$$9. \int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1} dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + x + \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + \operatorname{arccotan} x + c \right]$$

$$10. \int \frac{2x^5 - 7x^4 + 11x^3 - 24x^2 + 27x - 16}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 8x + 12} dx$$

$$\left[x^2 - x + \ln |x - 2| + \frac{\sqrt{11}}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \ln |x^2 + x + 3| + \frac{1}{\sqrt{11}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{11}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + c \right]$$

19.3.2 Funkce typu $R(x, \sqrt[n]{x})$

1. $\int \frac{dx}{x - \sqrt[3]{x}}$

$$\left[\frac{3}{2} \ln \left| \sqrt[3]{x^2 - 1} \right| + c, \text{ substitute } x = t^3 \right]$$

2. $\int \frac{dx}{(1 + \sqrt[4]{x}) \sqrt[3]{x}}$

$$\left[\frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} - 6 \sqrt[6]{x} + 4 \ln \left| \sqrt[12]{x} + 1 \right| + 2 \ln \left| \sqrt[6]{x} - \sqrt[12]{x} + 1 \right| + \right. \\ \left. + 4\sqrt{3} \arctan \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\sqrt[12]{x} - \frac{1}{2} \right) + c, \text{ substitute } x = t^{12} \right]$$

19.3.3 Funkce typu $R(\sin x, \cos x)$

1. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx$

$$\left[-\frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{2}{7} \cos^7 x - \frac{1}{9} \cos^9 x + c, \text{ substitute } t = \cos x \right]$$

2. $\int \cos^5 x dx$

$$\left[\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + c, \text{ substitute } t = \sin x \right]$$

3. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$

$$\left[-\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{3 \cos^3 x} + c, \text{ substitute } t = \cos x \right]$$

4. $\int \frac{\sin x \cdot \cos x}{1 + \sin^4 x} dx$

$$\left[\frac{1}{2} \arctan(\sin^2 x) + c, \text{ substitute } t = \sin x, u = t^2 \right]$$

5. $\int \frac{(2 + \sin x) \cos x}{\sin^2 x - 2 \sin x + 5} dx$

$$\left[\frac{1}{2} \ln \left| \sin^2 x - 2 \sin x + 5 \right| \frac{3}{2} + \arctan \frac{\sin x - 1}{2} + c, \text{ substitute } t = \sin x \right]$$

6. $\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$

$$\left[\frac{1}{2} \arctan \frac{\tan x}{2} + c, \text{ substitute } t = \tan x, u = \frac{t}{2} \right]$$

7. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx$

$$\left[-\frac{3}{2} \ln \left| \tan x + 2 \right| + \frac{3}{10} \ln \left| \tan^2 x + 1 \right| - \frac{1}{5} x + c, \text{ substitute } t = \tan x \right]$$

20 Riemannův integrál

Spočtěte určité integrály:

1. $\int_{-1}^3 \sqrt[3]{x} dx$

$$\left[\frac{9\sqrt[3]{3}-3}{4} \right]$$

2. $\int_0^2 e^{2x} dx$

$$\left[\frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \right]$$

3. $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{9-9x^2}} dx$

$$\left[\frac{\pi}{3} \right]$$

4. $\int_0^1 x \arctan x dx$

$$\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right]$$

5. $\int_0^1 x^2 e^x dx$

$$[e - 2]$$

6. $\int_0^1 \frac{x}{e^x} dx$

(Rada: $\frac{x}{e^x} = x \frac{1}{e^x} = x e^{-x}$ a dále Per partes.)

$$\left[1 - \frac{2}{e} \right]$$

7. $\int_1^e \ln x dx$

$$[1]$$

8. $\int_{-\pi}^0 \sin^2 x dx$

$$\left[\frac{\pi}{2} \right]$$

9. $\int_0^1 \arcsin x dx$

$$[\pi - 1]$$

10. $\int_0^1 \arccos x dx$

$$[1]$$

11. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$
[$\frac{1}{2}$]
12. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$
[$1 - \frac{\pi}{4}$]
13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$
[$1 - \frac{\pi}{4}$]
14. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cos^3 x dx$
[0]
15. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2} dx$
[$\frac{167}{10} - \frac{21\pi}{4}$]
16. $\int_{-1}^1 f(x) dx$, $f(x) = 0$ pro $x = 0$ a $f(x) = 1$ pro $x \neq 0$
(Rada: Rozdělte si integrál na dva, podle vzorečku o záměně součtu integrálů přes sousedící intervaly za integrál přes součet těchto dvou intervalů. Integrál přes "jednobodový interval" $I = 0$ je roven nule, proto se nemusíte bát tento bod vypustit a zbydou integrály přes $\langle -1, 0 \rangle$ a $\langle 0, 1 \rangle$ z konstantní funkce.)
[2]
17. $\int_{-1}^2 \operatorname{sgn}(x) dx$
[3]

21 Aplikace integrálu

21.1 Plocha rovinného obrazce

1. Určete obsah podgrafu funkce $y = 1$ na intervalu $\langle 1, 2 \rangle$.

[1]

2. Určete obsah podgrafu funkce $y = |x|$ na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

[1]

3. Určete obsah nadgrafu funkce $y = -x$ na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.
(Pozn. Plocha musí být kladná, proto musíme počítat $|-f|$.
Nadgraf je omezen shora osou x .)

$[\frac{1}{2}]$

4. Určete velikost plochy omezené grafem funkce $y = \cos x$ a osou x na intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \rangle$.

[4]

5. Určete velikost plochy určené grafy funkcí $y = 2^x$, $y = 2$ a přímkou $x = 0$.

$[2 - \frac{1}{\ln 2}]$

6. Určete velikost plochy sevřené mezi grafy funkcí $y = 2x - x^2$ a $y = x^2 - 2x$.
(Pozn. Plochu musíme rozdělit na část nad osou a část pod osou, obě musíme brát kladné.)

$[\frac{32}{15}]$

7. Určete velikost plochy sevřené mezi grafy funkcí $y = x$ a $y = x^3$.

[1]

21.2 Délka křivky

1. Určete délku grafu funkce $y = 3$ na intervalu $\langle -10, 10 \rangle$.

[20]

2. Určete délku grafu funkce $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$.

$[2\sqrt{3} - \frac{2}{3}]$

3. Určete délku grafu funkce $y = x$ mezi body $[0, 0]$ a $[\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

[2]

4. * Určete délku grafu funkce $y = \ln x$ na intervalu $\langle \sqrt{3}, \sqrt{8} \rangle$.

$[1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}]$

21.3 Objem rotačního tělesa

1. Určete objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = \cos x$ kolem osy x na intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

$$\left[\frac{\pi^2}{4} \right]$$

2. Určete objem rotačního válce o výšce 10 a poloměru 2.

$$[40\pi]$$

3. Určete objem koule o poloměru 3.
(Pozn. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.)

$$[36\pi]$$

21.4 Povrch pláště rotačního tělesa

1. Určete povrch pláště rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $y = x$ kolem osy x na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.

$$[2\sqrt{2}\pi]$$