5. INVERZNÍ MATICE

Řekneme, že matice $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ má inverzní matici, jetliže existuje matice $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{K})$ taková, že

$$AB = BA = E.$$

Ke každé matici existuje nejvýše jedna inverzní matice. Značíme ji A^{-1}. Matici, která má matici inverzní, nazýváme regulární maticí.

Metoda výpočtu inverzní matice spočívá v použití EŘO. Nechť A je matice typu $n \times n$. Vytvoříme blokovou matici B tak, že zapíšeme A a jednotkovou matici E vedle sebe – A nalevo, E napravo:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & | & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & | & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Matici B upravujeme nejdříve na schodovitý tvar. Pokud je ve schodovitém tvaru v levém bloku řádek ze samých nul, inverzní matice k A neexistuje. Pokud tento případ nenastane, pokračujeme v řádkových úpravách tak, abychom v levém bloku dostali jednotkovou matici. (Tento postup se nazývá zpětmá Gaussova eliminace.) V pravém bloku je potom A^{-1}.

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Řešení: Vytvoříme blokovou matici tak, že A napíšeme nalevo, E napravo a upravujeme pomocí EŘO na schodovitý tvar (přímou Gaussovou eliminací).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ze schodovitého tvaru vidíme, že A^{-1} existuje. Matici tedy dále upravujeme na redukovaný schodovitý tvar (zpětnou Gaussovou eliminací).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Správnost výpočtu ověříme vynásobením A s A^{-1}.

Příklad: Najděte inverzní matici k matici $C = \begin{pmatrix} i & -2 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Řešení: Napíšeme blokovou matici nalevo s maticí C, napravo s jednotkovou maticí a upravujeme na redukovaný schodovitý tvar:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} i & -2 & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 & 1 \end{array}\right)$$

První řádek vynásobíme $-i$, od druhého řádku odečteme nový první řádek.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2i & -i & 0 \\ 0 & -i & i & 1 \end{array}\right)$$

K prvnímu řádku přičteme dvojnásobek druhého řádku, druhý řádek vynásobíme i.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & i & 2 \\ 0 & 1 & -1 & i \end{array}\right)$$

Tedy $C^{-1} = \begin{pmatrix} i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}$

Cvičení:

1. Vypočtěte inverzní matice k daným maticím.
$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 & -2 \\ -1 & -6 & -11 & 4 \\ 0 & -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Mějme matice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.
   (a) Najděte jejich inverze.
   (b) Ukažte, že
      i. $(A^{-1})^{-1} = A$
      ii. $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$
      iii. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
      iv. $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

3. Najděte inverzní matice k daným maticím.

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \; L = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \; M = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Najděte inverzní matice k následujícím maticím v **C**.
$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 2-3i & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} -i & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.