

3. MATICE, OPERACE S MATICEMI

Definujme nejprve základní operace s maticemi.

Sčítání matic: Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $m \times n$. Pak $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Násobení matic skalárem: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $a \in \mathbf{R}$ je skalár. Pak $a \cdot A = (a \cdot a_{ij})$ je matice typu $m \times n$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Násobení matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$, $B = (b_{jk})$ je matice typu $n \times p$. Pak $AB = C = (c_{ik})$ je matice typu $m \times p$ a $c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$.

Transponování matic: Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $m \times n$. Pak $A^T = (a_{ji})$ je matice typu $n \times m$ pro $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Stopa matice, ozn. $\text{Tr}(A)$, je součet prvků matice na hlavní diagonále. $\text{Tr}(A)$ je definována pouze pro čtvercové matice.

Příklad: Mějme matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, E = (1 \ 0 \ -2),$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte matice $2D - 5F, A + 3C, C^T, A^T, 2C + 4E^T, AB, EC, CE, F^2 - 3D$. Dále vypočtěte stopy matic A, \dots, F .

Řešení:

$$2D - 5F = 2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 37 \end{pmatrix}$$

Součet $A + 3C$ není definován.

$$C^T = (3 \ 2 \ -1) \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2C + 4E^T = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) & 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$EC = (1 \ 0 \ -2) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + (-2)(-1)) = (5)$$

$$CE = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ -2) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-2) \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 0 & (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F^2 - 3D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 46 \end{pmatrix}$$

$\text{Tr}(D) = 2$, $\text{Tr}(F) = -6$, pro ostatní matice není stopa definována.

Cvičení:

1. Uvažme matice nad \mathbf{Z}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = (-1 \ 0 \ 2), C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, I = (1 \ 0 \ -2 \ 4).$$

(α) Které matice můžeme násobit s A zleva a zprava?

(β) Spočtěte (pokud je definováno):

(a) EI

(b) IE

(c) $D^3 + 4DH - H^2$

(d) $G^2 - 3F$

(e) $A - F$

(f) $A - GFA$

(g) $BACE - BFB^T$

2. Uvažme matice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte (je-li definováno):

(a) $(4B)C + 2B$

(b) $2A^T + C$

(c) $D^T - E^T$

(d) $(D - E)^T$

(e) $D^T E^T - (ED)^T$

(f) $(AB)C$

(g) $A(BC)$

(h) $\text{Tr}(D)$

(i) $\text{Tr}(D - 3E)$

(j) $4\text{Tr}(7B)$

(k) $\text{Tr}(A)$

(l) $\text{Tr}(DD^T)$

(m) $C^T A^T + 2E^T$

3. Mějme A a B blokové matice:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & & \\ \hline & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} B_{11} & B_{12} & & \\ \hline & & & \\ B_{21} & B_{22} & & \end{array} \right)$$

$$\text{Jejich součin lze vyjádřit: } AB = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & & \\ \hline & & & \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & & \end{array} \right)$$

za předpokladu, že bloky matic A a B mají vhodné rozměry. Tato metoda se nazývá blokové násobení.

Vynásobte následující matice blokově a výsledek ověřte obyčejným maticovým násobením:

$$(a) \quad A = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline & & & \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & \\ -3 & 5 & 2 & \\ \hline & & & \\ 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 3 & -3 & \end{array} \right)$$

$$(b) \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \\ \hline & & & \\ 1 & 5 & 6 & 1 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 4 & \\ -3 & 5 & 2 & \\ \hline & & & \\ 7 & -1 & 5 & \\ 0 & 3 & -3 & \end{array} \right)$$

$$(c) \quad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{array} \right) \quad B = \left(\begin{array}{ccc} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ \hline & & \\ 2 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

4. Ukažte, že má-li A nulový řádek a B je matice taková, že AB je definován, pak AB obsahuje také nulový řádek.

Taktéž ukažte, že má-li B nulový sloupec a AB je definován, pak i AB má nulový sloupec.

5. Nechť $E = (e_{ij})$ je matice typu $n \times n$ splňující

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } i = j \\ 0 & \text{pro } i \neq j \end{cases}$$

Ukažte, že $AE = EA = A$ pro libovolnou matici A typu $n \times n$.
 E se nazývá jednotková matice.

6. Najděte matici $A = (a_{ij})$ typu 4×4 splňující následující podmínky:

(a) $a_{ij} = i + j$

(b) $a_{ij} = i^{j-1}$

(c) $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pro } |i - j| > 1 \\ -1 & \text{pro } |i - j| \leq 1 \end{cases}$

7. Maticí A tvaru $n \times n$ takovou, že

(a) $A_{22} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna $i \neq 2$ a $A_{ij} = 0$ pro $i \neq j$,

(b) $A_{13} = A_{22} = A_{31} = A_{ii} = 1$ pro $i \geq 4$ a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij ,

(c) $A_{13} = a, A_{ii} = 1$ pro všechna i a $A_{ij} = 0$ pro všechny ostatní dvojice ij

vynásobte obecnou matici $B = (B_{ij})$ tvaru $n \times m$ zleva a obecnou matici $C = (C_{ij})$ tvaru $m \times n$ zprava. Jak se výsledky násobení liší od matice B , resp. C ?

8. Najděte matici A typu 2×2 takovou, že zobrazení $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, je stejnoolehlost se středem v $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a koeficientem 3.

9. Najděte matici A typu 2×2 tak, aby $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ -x + y \end{pmatrix}$.

10. Kolik existuje matic A typu 3×3 takových, že platí:

(a) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

11. Matice B se nazývá odmocninou matice A , jestliže platí $BB = A$.

(a) Najděte odmocninu matice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(b) Kolik existuje různých odmocnin matice $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(c) Mají všechny matice typu 2×2 odmocninu? Vysvětlete.

12. Nechť O je nulová matice typu 2×2 .

(a) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = O$? Dokažte.

(b) Existují matice A typu 2×2 takové, že $A \neq O$ a $AA = A$? Dokažte.

13. Ukažte, že násobení sloupcového vektoru v \mathbf{R}^2 maticí $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ reprezentuje otočení v rovině o úhel α . Spočtěte A^2, A^3 (obecně A^k).

14. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Dokažte, že $A^n = \begin{pmatrix} a_{2n-1} & a_{2n} \\ a_{2n} & a_{2n+1} \end{pmatrix}$, kde $\{a_n\}$ je Fibonacciho posloupnost a $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

15. Orientovaný graf G je tvořen množinou vrcholů $V = \{1, 2, \dots, n\}$ a množinou hran $H = \{(i, j) : i, j \in V\}$.

Matice grafu G je definována takto: $a_{ij} = 1$ právě, když $(i, j) \in H$, $a_{ij} = 0$ právě, když $(i, j) \notin H$.

Cesta délky k je tvořena posloupností čísel $i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}$ takových, že $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1}) \in H$.

Určete, jaký je vztah mezi A^2, A^3, \dots, A^k a cestami délky $2, 3, \dots, k$.