

Cvičení 1

1. Vytvořte tabulky pro sčítání a násobení v \mathbb{Z}_7 .

2. Dokažte matematickou indukcí:

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

3. $a \in \mathbb{R}, a + \frac{1}{a} = 1 (\in \mathbb{Z})$. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $a^n + \frac{1}{a^n}$ celé číslo.

4. Dokažte, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ a $\forall x \in \mathbb{R} : \sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x) \leq 1$.

5. Pavel uložil 50000 Kč na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3%. Úrokovací období je 1 měsíc. Kolik banka zaplatí na úrocích za 1 měsíc?

6. Jakou částku by bylo nutné uložit v bance s úrokovou mírou 3%, aby roční úrok dosáhl 120000 Kč?

7. Do banky bylo vloženo 32000 Kč na dobu 3 roky. Jaká bude částka na účtu po uplynutí této doby, jestliže úroková míra je 4,8%.

8. Upravte výraz:

$$\frac{(n+2)!}{n!} - \frac{2(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$$

9. Upravte výraz:

$$\frac{\binom{16}{3} + \binom{16}{4} + \binom{17}{5}}{\binom{18}{6}}$$

10. Určete všechna přirozená $m, n > 1$, pro která platí:

$$\binom{m+n}{2} \leq \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + 10$$

11. Umocněte pomocí binomického rozvoje:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$$

12. 3. člen binomického rozvoje je roven 1. Určete pro jaké m to nastane:

$$\left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{7}}{2}} + m\right)^8$$

13. Určete počet nejvýše trojčiferných čísel, v nichž se číslice neopakují.

14. Kolik různých hodů lze provést 4 kostkami?

15. Určete kolika způsoby se v šestimístné lavici může posadit 6 hochů, jestliže:

- 2 chtějí sedět vedle sebe
- 2 chtějí sedět vedle sebe a 3. na kraji

16. Kolik permutací s opakováním lze vytvořit z písmen slova OKOLO?

17. Kolika způsoby lze na šachovnici (8×8) vybrat:

- trojici políček

- trojici políček neležících ve stejném sloupci
- trojici políček neležících ve stejném sloupci ani v témže řádku
- trojici políček, která nejsou všechna téže barvy

18. Kolika způsoby lze umístit 4 stejné koule do 3 různých krabic?

19. Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy. Určete:

- kolika způsoby lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře
- předchozí tak, aby předseda byl muž a místopředseda žena nebo obráceně
- předchozí tak, aby právě 1 byla žena
- trojici políček, která nejsou všechna téže barvy