OBECNÉ VEKTOROVÉ PROSTORY SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

(Na úvod bych řekla, buďto celou definici skalárního součinu nebo jenom že je to zobrazení s určitými vlastnostmi a je jich mnoho ruzných, protože definici mají znát z přednášky, ponechám rozhodnutí na vás.)

$(V, +, \cdot)$ vektorový prostor. Zobrazení $\langle -, - \rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$ nazýváme **skalární součin** na V pokud toto zobrazení je:

- pozitivně definitní – $\langle u, u \rangle \geq 0$ a $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- symetrické – $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- lineární v první složce – $\langle a \cdot u + b \cdot v, w \rangle = a\langle u, w \rangle + b\langle v, w \rangle$

Každý skalární součin nám definuje **normu** jako $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$

Příklady nejčastěji používaných skalárních součinu a norem:

- klasický v $\mathbb{R}^n$, norma sa nazýva *Euklidovská* a značit budeme $\|u\|_2$
- pro matice typu $m \times n$ $\langle A, B \rangle =$(suma přes všechny i,j) $a_{ij}b_{ij}$, určuje tzv. *Frobeniovu normu* $\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle}$

Vektory nazveme **ortogonální (kolmé)** pokud $\langle u, v \rangle = 0$, množina vektoru je ortogonální (kolmá) pokud každá dvojice (ruzných vektoru) je ortogonální. (Poznámka: Je jasné, že ortogonální množina je tvořena lineárně nezávislými vektory – dukaz ve skriptech.)

Příklad Určete zda podprostory matic typu 2×2 jsou na sebe kolmé

$$V = Span\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rangle \; W = Span\langle C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \rangle$$

Řešení: Stejně jako v minulé kapitole, stačí určit zda jsou na sebe kolmé vektory báze, tedy zda A je kolmé na C a B je kolmé na C.

$$\langle A, C \rangle = 2 + 4 - 6 + 0 = 0$$

$$\langle B, C \rangle = 2 - 2 + 0 + 0 = 0$$

Podprostory jsou na sebe kolmé.

Množina se nazývá **ortonormální**, pokud je ortogonální a $\|u\| = 1$ pro každý vektor množiny.
Čtvercová matice se nazývá **ortogonální**, pokud její sloupce tvoří ortonormální množinu.

Příklad Určete zda matice A je ortogonální.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}0 = 0$ – podobně spočítáme zvyšné dvojice, které jsou taky kolmé.
$\|v_1\| = \sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = 1$ – opět stejným zpusobem dopočítejte délky ostatních vektoru, které jsou tak rovny 1.
Matice je ortogonální.

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a W jeho podprostor, $\alpha = (u_1, \ldots, u_k)$ je nějaká ortonormální báze podprostoru W, $v \in V$. **Projekce vektoru v na podprostor** W je vektor z podprostoru, který je nejblíže zadanému vektoru v a je to vektor

$$p = a_1u_1 + \ldots + a_ku_k \text{ kde } a_i = \langle v, u_i \rangle.$$

(je zadán jednoznačně, nakreslete obrázek jak to vypadá v $\mathbb{R}^3$)

Příklad Najděte kolmou projekci vektoru $v = (1, 2, 3)$ na podprostor $W = Span\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$
Řešení: Ukažte, že $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ je opravdu ortonormální báze, pak

$$p = \langle(1, 2, 3), (1, 0, 0)\rangle \cdot (1, 0, 0) + \langle(1, 2, 3), (0, 1, 0)\rangle \cdot (0, 1, 0) = (1, 2, 0)$$

Gram-Schmidtuv ortogonalizační proces – provádění libovolné báze na ortogonální (pak ortonormální) bázi. (Umožní nám počítat projekce i bez zadání ortonormální báze.)
Nechť $V = Span\langle u_1, \ldots, u_k\rangle$, kde tyto vektory jsou lineárně nezávislé. Vytvoříme ortogonální množinu $v_1, \ldots, v_k$ tak, že $Span\langle v_1, \ldots, v_k\rangle = V$.

- $v_1 = u_1$
- pro $1 < i \leq k$: $v_i = u_i - \frac{\langle u_i, v_1\rangle}{\langle v_1, v_1\rangle} \cdot v_1 - \ldots - \frac{\langle u_i, v_{i-1}\rangle}{\langle v_{i-1}, v_{i-1}\rangle} \cdot v_{i-1}$
- všimněte si, že vektory vytváříme tak, aby byly kolmé na všechny předcházející – pomocí odečítání kolmých projekcí vektoru u_i na podprostory generované jednotlivými vektory
- normalizace – každý vektor podělíme jeho délkou $w_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}$

Příklad Převeďte bázi $\alpha = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ prostoru $\mathbb{R}^3$ na bázi ortonormální.
Řešení: Budeme postupovat podle Gram-Schmidtova procesu:

- $v_1 = (0,1,1)$
- $v_2 = (1,0,1) - \frac{\langle(1,0,1),(0,1,1)\rangle}{\langle(0,1,1),(0,1,1)\rangle} \cdot (0,1,1) = (1,0,1) - \frac{1}{2} \cdot (0,1,1) = (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
- $v_3 = (1,1,0) - \frac{\langle(1,1,0),(0,1,1)\rangle}{\langle(0,1,1),(0,1,1)\rangle} \cdot (0,1,1) - \frac{\langle(1,1,0),(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle}{\langle(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\rangle} \cdot (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (1,1,0) - \frac{1}{2} \cdot (0,1,1) - \frac{1}{3} \cdot (1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = (\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$

Teď ještě provedeme normalizaci:

- $w_1 = \frac{(0,1,1)}{\sqrt{1+1}} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$
- $w_2 = \frac{(1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = (\sqrt{\frac{2}{3}}, -\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}})$
- $w_3 = \frac{(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})}{\sqrt{\frac{4}{3}}} = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$

Příklad Určete kolmý prumět vektoru $u = (0,0,7)$ na podprostor W generovaný vektory $(1,2,1), (-2,1,1)$.
Řešení: Nejdřív najdeme ortonormální bázi podprostoru:

- $v_1 = (1,2,1)$
- $v_2 = (-2,1,1) - \frac{1}{6} \cdot (1,2,1) = (\frac{-13}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6})$
- $w_1 = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1+4+1}} = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$
- $w_2 = \frac{(\frac{-13}{6},\frac{4}{6},\frac{5}{6})}{\sqrt{\frac{210}{6^2}}} = (\frac{-13}{\sqrt{210}}, \frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{5}{\sqrt{210}})$

Teď vypočteme projekci:

$$p = \frac{7}{\sqrt{6}} \cdot (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}) + \frac{35}{\sqrt{210}} \cdot (\frac{-13}{\sqrt{210}}, \frac{4}{\sqrt{210}}, \frac{5}{\sqrt{210}}) =$$

$$= (\frac{7}{6}, \frac{14}{6}, \frac{7}{6}) + (\frac{-13}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}) = (-1,3,2)$$

Taky mužeme určit vzdálenost vektoru u od podprostoru W, a to je přesně vzdálenost u od jeho projekce

$$v(u,W) = \|u-p\| = \|(1,-3,5)\| = \sqrt{35}$$

. A taky úhel φ mezi vektorem u a podprostorem W jako

$$\cos\varphi = \frac{\|p\|}{\|u\|} = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

.