

Pravděpodobnost

1. V krabici je 6 zelených a 11 žlutých míčků. Postupně vytáhneme náhodně tři z nich. Víme, že první a třetí tažený míček je žlutý. Který způsob tahu - s vracením nebo bez vracení - dá větší pravděpodobnost tohoto jevu?

S vracením: Počet všech trojic vytažených míčků je 17^3 . Protože na druhém místě může být buď zelený - takových trojic je $11 \cdot 6 \cdot 11$ - nebo žlutý, takových trojic je 11^3 , je

$$P = \frac{11^2 \cdot 6 + 11^3}{17^3} = 0,418$$

Bez vracení:

$$P = \frac{11 \cdot 6 \cdot 10 + 11 \cdot 10 \cdot 9}{17 \cdot 16 \cdot 15} = 0,404$$

2. 5 vadných tištěných spojů je zamícháno mezi 10 dobrých. Postupně je testujeme dokud neobjevíme všechny dobré spoje. Jaká je pravděpodobnost, že poslední z dobrých spojů bude objeven jako 12-tý v pořadí?

Všech uspořádání 15 spojů je $15!$. Příznivá uspořádání vzniknou takto: Na zadané 12. místo dáme jeden z 10 dobrých spojů. Za něj na místa 13, 14, 15 umístíme 3 vadné spoje, což lze $5 \cdot 4 \cdot 3$ způsoby. Na zbylá místa 1-11 dáme zbylých 11 spojů jakkoliv, což lze $11!$ způsoby:

$$P = \frac{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11!}{15!} = 0,018$$

3. V krabici máme n bílých a m černých koulí. Postupně je taháme všechny ven (bez vracení). Jaká je pravděpodobnost, že k -tá tažená koule je bílá?

Všech možností jak postupně vytáhnout $m+n$ koulí z krabice je $(m+n)!$. Příznivé uspořádání vznikne tak, že na k -té místo dáme bílou kouli, což lze n způsoby. Ostatní koule doplníme libovolně $(m+n-1)!$ způsoby:

$$P = \frac{n(m+n-1)!}{(m+n)!} = \frac{n}{m+n}.$$

4. Hodíme tři kostky. Jaká je pravděpodobnost, že padla alespoň jedna šestka, víme-li, že padla navzájem různá čísla?

Položme $A = \{\text{alespoň jedna 6}\}$ a $B = \{\text{navzájem různá čísla}\}$. Pak

$$P(B) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}, P(A \cap B) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6^3}$$

, takže

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

5. Předpokládáme, že narození chlapce nebo děvčete má stejnou pravděpodobnost. Jaká je pravděpodobnost, že v rodině se dvěma dětmi jsou oba chlapci, víme-li:

a) alespoň jedno z dětí je chlapec.

Položme $A = \{\text{oba chlapci}\}$ a $B = \{\text{alespoň jeden chlapec}\}$. Pak

$$P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad a \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4}.$$

Takže

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

b) první dítě je chlapec.

Zde bude jev $B = \{\text{první dítě je chlapec}\}$. Pak

$$P(B) = \frac{1}{2} \quad a \quad P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4}.$$

Pak

$$P(A|B) = \frac{1}{2}$$

6. Zásilka 24 produktů obsahuje 13 vadných. Je rozdělena do dvou stejných skupin.

a) Jaká je pravděpodobnost, že jedna skupina obsahuje jen vadné produkty?

Počet všech rozdělení 24 produktů do dvou stejných skupin je $\binom{24}{12}$. Příznivá rozdělení dostaneme, že buď do první nebo do druhé skupiny vyberáme pouze z 13-ti vadných produktů, což je $2 \binom{13}{12}$. Takže

$$P = \frac{2 \binom{13}{12}}{\binom{24}{12}}$$

b) Produkty jsou rozděleny tak, že jedna skupina se skládá ze samých vadných výrobků. Náhodně zvolíme skupinu a produkt z ní. Je vadný. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolený produkt z druhé skupiny bude také vadný?

Budeme potřebovat následující jevy:

$C = \{\text{náhodně zvolená skupina obsahuje jen vadné produkty}\}$

$B = \{\text{produkt zvolený z náhodně vybrané skupiny je vadný}\}$

$A = \{\text{produkt zvolený z druhé skupiny je vadný}\}$

V tomto označení máme zjistit $P(A|B)$. Pro výpočet $P(A \cap B)$ a $P(B)$ musíme použít vzorec pro úplnou pravděpodobnost.

$$P(B) = P(B|C)P(C) + P(B|\hat{C})P(\hat{C}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$$

$$P(A \cap B) = P(A \cap B|C)P(C) + P(A \cap B|\hat{C})P(\hat{C}) = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Odtud

$$P(A|B) = \frac{2}{13}$$

7. Stroj má 2 komponenty A a B, které fungují nezávisle na sobě. Stroj pracuje, jsou-li obě komponenty funkční. Víme, že A má spolehlivost 98% a stroj má spolehlivost 95%. Jakou spolehlivost má komponenta B?

$A = \{A \text{ je funkční}\}$ $B = \{B \text{ je funkční}\}$

$$P(A) = 0,98 \quad P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0,95$$

odtud

$$P(B) = 0,97$$

8. Hráči házejí korunou, vyhrává ten, kterému dříve padne líc. Určete pravděpodobnost výhry hráčů v případě, že hrají 2 nebo 3?

$$P(A_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{3}$$

$$P(A_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} + \frac{1}{128} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{64} + \dots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{4}{7}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{1}{4} \cdot (1 + \frac{1}{8} + \dots) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{2}{7}$$

$$P(A_3) = \frac{1}{7}$$

9. Vybíráme ze 7 mužů a 5 žen 3. Jaká je pravděpodobnost, že ve výběru:

- nebude žádná žena

$$|A| = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35 \quad |\omega| = \binom{12}{3} = \frac{12!}{9! \cdot 3!} = 220$$

$$P(A) = \frac{35}{220} = 0,159$$

- budou právě 2 ženy

$$P(A) = \frac{\binom{7}{1} \cdot \binom{5}{2}}{220} = \frac{7 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2}}{220} = 0,318$$

- budou nejvýše 2:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1} + \binom{7}{1} \cdot \binom{5}{2}}{220} = 0,955$$

- bude více mužů než žen:

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3} + \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{1}}{220} = 0,636$$

10. Ve třídě je 32 žáků, z toho 10 se na hodinu nepřipravilo. S jakou pravděpodobností budou aspoň 2 ze 3 zkoušených žáků připraveni?

$$P(A) = \frac{\binom{22}{2} \cdot \binom{10}{1} + \binom{22}{3}}{\binom{32}{3}} = 0,77621$$