Vektorové prostory, lineární zobrazení

V tomto dokumentu je shrnuta základní problematika vektorových prostorů a lineárních zobrazení. Potřebná teorie je psána zelenou barvou, vysvětlující komentáře modrou barvou a samotné výpočty jsou klasicky černou. Snad vám to pomůže trochu se zorientovat.

Vektorové prostory

Nechť V je množina, na které jsou definovány operace sčítání a násobení reálným číslem. Pak V je vektorový prostor, pokud pro $u, v, w \in V, a, b \in \mathbf{R}$ platí:

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $\exists 0 \in V : 0 + u = u$
4. $\exists - u \in V : (-u) + u = 0$
5. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
6. $(a + b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u$
7. $(a \cdot b) \cdot u = a \cdot (b \cdot u)$
8. $1 \cdot u = u$

Příklad 1 *Zjistěte, zda množina* $R^+ = \{x \in R, x > 0\}$ *s operacemi* $x \oplus y = x \cdot y$, $a \odot x = x^a$ *pro* $x, y \in R^+, a \in R$ *tvoří vektorový prostor.*

Je třeba pro dané operace ověřit všechny axiomy vektorového prostoru:

1. $x \oplus y = x \cdot y = y \cdot x = y \oplus x$

2. $(x \oplus y) \oplus z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \oplus (y \oplus z)$

3. neutrálním prvkem (= nulový vektor) pro $\oplus$ je 1: $x \oplus 1 = x \cdot 1 = x$

4. opačným prvkem (= opačný vektor) pro $\oplus$ je $\frac{1}{x}$: $x \oplus \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1$

5. $a \odot (x \oplus y) = (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$

6. $(a + b) \odot x = x^{(a+b)} = x^a \cdot x^b = (a \odot x) \oplus (b \odot y)$

7. $(a \cdot b) \odot x = x^{a \cdot b} = (x^b)^a = a \odot (b \odot x)$

8. $1 \odot x = x^1 = x$

$\Rightarrow (R^+, \oplus, \odot)$ je vektorový prostor

Příklad 2 *Zjistěte, zda množina* $V = \{(x, y) \in R^2, x, y \in R\}$ *s operacemi* $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y'), k \oplus (x, y) = (2kx, 2ky)$ *tvoří vektorový prostor.*

Axiomy $1 - 6$ platí
7. $(a \cdot b) \odot (x, y) = (2abx, 2aby) \neq a \odot (b \odot (x, y)) = (4abx, 4aby)$
8. $1 \odot (x, y) = (2x, 2y) \neq (x, y)$
$\Rightarrow V$ netvoří vektorový prostor

Vektorové podprostory

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor. Množina $W \subseteq V$ se nazývá (lineární) vektorový podprostor prostoru V, jestliže pro každé $u, v \in W$ a $a \in R$ platí:

1. $W \neq \emptyset$

2. $u + v \in W$

3. $a \cdot u \in W$

Příklad 3 *Určete, zda množina $M = \{(x, y) \in R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ tvoří vektorový podprostor v R^2.*

Opět ověříme potřebné axiomy:

1. $M \neq \emptyset$

2. pokud (x, y) a $(u, v) \in M$, pak i $(x, y) + (u, v) \in M$, neboť $x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \Rightarrow x + u \geq 0, y + v \geq 0$

3. obecně neplatí, neboť pro $a < 0$ je $(ax, ay) < 0$

$\Rightarrow M$ není vektorový podprostor v R^2

Příklad 4 *Určete, zda množina $M = \{(a, b, c) \in R^3, b = a + c\}$ tvoří vektorový podprostor v R^3.*

1. $M \neq \emptyset$

2. $(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) \in M$, neboť $b = a + c, e = d + f \Rightarrow b + e = a + d + c + f$

3. $t \cdot (a, b, c) = (ta, tb, tc) \in M$, neboť $b = a + c \Rightarrow t \cdot b = t \cdot a + t \cdot c$

$\Rightarrow M$ je vektorový podprostor prostoru R^3

Báze a dimenze

Vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ tvoří <u>bázi</u> vektorového prostoru V, pokud jsou lineárně nezávislé a generují celý prostor V
<u>Dimenze</u> vektorového prostoru V (dimV)= počet vektorů v bázi.
<u>Lineární obal</u> množiny $M \subseteq V$= průnik všech podprostorů prostoru V obsahujících množinu M (zn. $< M >$)
M je <u>množina generátorů</u> prostoru V, jestliže $< M >= V$

Příklad 5 *Najděte nějakou bázi a určete dimenzi lineárního obalu množiny M ve vektorovém prostoru $V = R^4$.*
$M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5), (3,4,5,6), (-4,-5,-6,-7), (5,6,7,8)\}$

Abychom získali bázi, musíme z množiny M vybrat podmnožinu nezávislých vektorů. Z vektorů tedy sestavíme matici (každý sloupec reprezentuje jeden vektor) a pomocí GEM ji upravíme na schodovitý tvar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & -5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -5 & 6 & -7 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 3 & -6 & 9 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že schodovitý tvar tvoří pouze první dva vektory. Báze dané množiny je tedy tvořena pouze vektory $(1,2,3,4)$ a $(-2,-3,-4,-5)$, ostatní lze jednoduše získat jako jejich lineární kombinaci.

$\alpha_M = \{(1,2,3,4), (-2,-3,-4,-5)\}$
$dim < M >= 2$

Příklad 6 *Doplňte množinu $M = \{(-1,1,0,0), (0,-1,1,0), (0,0,-1,1)\}$ na bázi prostoru R^4.*

Vektory opět napíšeme jako sloupce matice, kterou rozšíříme ještě o vektory standartní báze prostoru R^4. Matici budeme upravovat na schodovitý tvar a z vektorů standartní báze vybereme ten, jehož doplněním ke třem zadaným vektorům a úpravou takto vzniklé matice získáme úplný schodovitý tvar (žádné řádky nejsou lineárně závislé).

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Vektory množiny M jsou LN a doplněním kteréhokoliv z vektorů standartní báze získáme bázi R^4.

Příklad 7 *Který z vektorů u_1, u_2, u_3, u_4 doplňuje množinu α na bázi prostoru R^4.*
$\alpha = \{(1,-2,1,-1),(1,0,-1,-1),(1,1,-2,0)\}, u_1 = (-1,2,-1,1), u_2 = (3,-1,-2,-1), u_3 = (2,1,0,-2), u_4 = (2,1,-3,-2)$

Budeme postupovat jako v předchozím příkladě. Místo vektorů standartní báze rozšíříme matici o dané vektory u_1, u_2, u_3, u_4.

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} -1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -2 & 0 & -3 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -5 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Jediný vektor, který rozšiřuje danou bázi α na bázi R^4, je u_3 (doplňuje matici na úplný schodovitý tvar).
$\alpha_{R^4} = \alpha \cup u_3$

Souřadnice vektoru v bázi

Nechť $\alpha = \{u_1, \dots, u_n\}$ je báze prostoru V a nechť $w \in V$. Potom lze w jednoznačně vyjádřit jako $w = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$.
Pak sloupcový vektor $[w]_\alpha = (x_1, \dots x_n)^T$ nazýváme souřadnicemi vektoru w v bázi α

Příklad 8 *Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru V.*
$v = (2, 1, 1), \alpha = \{(2, 7, 3), (3, 9, 4), (1, 5, 3)\}, V = R^3$

Zadané souřadnice vektoru jsou vlastně souřadnice ve standardní bázi prostoru R^3. Souřadnice vektoru v bázi α získáme jako hodnoty koeficientů při zapsání tohoto vektoru jako lineární kombinace vektorů z báze α.

$v = a \cdot \alpha_1 + b \cdot \alpha_2 + c \cdot \alpha_3$
$(2, 1, 1) = a \cdot (2, 7, 3) + b \cdot (3, 9, 4) + c \cdot (1, 5, 3)$

Abychom získali koeficienty a, b, c, musíme dané vektory srovnat po jednotlivých složkách. V našem případě tedy získáme soustavu 3 rovnic o 3 neznámých.

$2 = 2a + 3b + c$
$1 = 7a + 9b + 5c$
$1 = 3a + 4b + 3c$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 7 & 9 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -6 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

c=0, b=4-c=4, a=1-1/2c-3/2b=1-6=-5

$[\mathrm{v}]_\alpha = (-5, 4, 0)$

Příklad 9 *Najděte souřadnice vektoru v v bázi α vektorového prostoru V.*

$V = mat_{2x2}, v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \alpha = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$=a $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+ b $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$+ c $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$+ d $\cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a+b+c+d=1
b+c+d=2
c+d=3
d=4
d=4, c=3-d=3-4=-1, b=2-c-d=2-4+1=-1, a=1-b-c-d=1+1+1-4=-1

$[\mathrm{v}]_\alpha = (-1, -1, -1, 4)^T$

Součet a průnik podprostorů

S, T jsou podprostory vektorového prostoru V.
Množina $S+T=\{x+y, x\in S, y\in T\}$ je podprostorem V a nazýváme jej součtem S a T.
Pokud $S\cap T=\emptyset$ je $S+T$ přímý součet

Pro konečnědimenzionální prostory platí:
$dimS+dimT=dim(S+T)+dim(S\cap T)$ resp.
$dim(S+T)=dimS+dimT-dim(S\cap T)$

Příklad 10 *Nechť* $P_1=[M_1], P_2=[M_2]$ *v* R^4*, kde*
$M_1=u_1=(4,0,-2,-6), u_2=(2,1,-2,3), u_3=(3,1,-2,4)$
$M_2=v_1=(1,-1,0,2), v_2=(2,2,-1,3), v_3=(0,1,1,0)$
$NajdteP_1+P_2$*,* $P_1\cap P_2$*, jejich báze a dimenze.*

$P_1+P_2=\{x+y; x\in P_1, y\in P_2\}$, tedy $P_1+P_2=[M_1\cup M_2]$
Určeme bázi $[M_1\cup M_2]$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

u$_1, u_2, u_3, v_2$ jsou LN $\Rightarrow P_1+P_2=[u_1,u_2,u_3,v_2]=R^4$
$dim(P_1+P_2)=4$

průnik:
$x\in P_1\cap P_2$
$\exists a_1,a_2,a_3: x=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3\in P_1$
$\exists b_1,b_2,b_3: x=b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3\in P_2$
$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3=b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3$
$a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3ib_1v_1-b_2v_2-b_3v_3=0$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -2 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

b$_3=p, b_2=-p, b_1=r$
$a_3=4p-4p-r=-r, a_2=p-2p-r+r=-p, a_1=\frac{-2p+r+3r+2p}{4}=r$
$P_1\cap P_2=\{x=ru_1-pu_2-ru_3; p,r\in R\}=\{x=r(u_1-u_3)-pu_2; p,r\in R\}=$
$\{x=r\cdot(1,-1,0,2)+p\cdot(-2,-1,2,-3); p,r\in R\}$
$\alpha_{(P_1\cap P_2)}=[(1,-1,0,2),(-2,-1,2,-3)]$
resp. $P_1\cap P_2=\{rv_1+p(v_3-v_2); r,p\in R\}$, $\alpha_{(P_1\cap P_2)}=[(1,-1,0,2),(-2,-1,2,-3)]$
$dim(P_1\cap P_2)=2$

Lineární zobrazení

Zobrazení $f : U- > V$ se nazývá lineární, jestliže platí:

1. $\forall x, y \in U : f(x + y) = f(x) + f(y)$

2. $\forall a \in K, x \in U : f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$

Předchozí podmínky lze souhrnně zapsat jako: $f(ax+by) = af(x)+bf(y), f(0) = 0$ Jádro zobrazení: $Kerf = \{x \in U; f(x) = 0\}$
Obraz zobrazení: $Imf = \{y \in V; y = f(x), x \in U\}$
Zobrazení je izomorfismus, jestliže $Kerf = \{0\} \wedge Imf = V$

Příklad 11 *Zjistěte, zda jsou následující zobrazení $f(x) : R^3- > R^2$ lineární. Pokud ano, určete Kerf a Imf:*

1. $f(x) = (1 + x_1, x_2)$

2. $f(x) = (1, 2)$

3. $f(x) = (x_1^2, -2x_2)$

4. $f(x) = (x_1 + x_2, x_1 - x_3)$

Stejně jako u vektorových prostoru a podprostorů ověříme příslušné axiomy

1. V případech $1, 2$ není obrazem nulového vektoru nulový vektor, nejedná se tedy o lineární zobrazení

2. Pro příklad 3:
$f(x + y) = f(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = ((x_1 + y_1)^2, -2 \cdot (x_2 + y_2))$
$f(x) + f(y) = (x_1^2, -2x_2) + (y_1^2. - 2y_2) = (x_1^2 + y_1^2, -2 \cdot (x_2 + y_2))$
$L \neq P$

3. Pro případ 4:
$f(ax + by) = f(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, ax_3 + by_3) = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 - ax_3 - by_3)$
$af(x) + bf(y) = (ax_1 + ax_2, ax_1 - ax_3) + (by_1 + by_2, by_1 - by_3) = (ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2, ax_1 + by_1 - ax_3 - by_3)$
$L = P$

$Ker f : f(x) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \wedge x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2, x_1 = x_3$
$x_1 = t \Rightarrow Ker f = \{(t, -t, t), t \in R\} = [(1, -1, 1)]$
$Im f$: obrazy vektorů standartní báze jsou $(1, 1), (1, 0), (0, -1)$
$Im f = [(1, 1), (1, 0), (0, -1)] = [(1, 0), (0, 1)] = R^2$

Příklad 12 *Je dáno lineární zobrazení* $f : R^4 - > R^4$
$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, -x_1 - x_2 - x_3 - x_4, x_1 - x_2 + x_3 - x_4, -2x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4) *$
Určete Ker f, Im f a najděte jejich báze.

Abychom určili jádro zobrazení, musíme položit $f(x) = 0$, všechny 4 složky obrazu tedy položíme rovny 0 a z daných 4 rovnic o 4 neznámých získáme hodnoty souřadnic x_1, x_2, x_3, x_4 zobrazovaného vektoru.

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$
$-2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x$_4 = t, x_3 = s, x_2 = -t, x_1 = -s$
$Ker f = \{s \cdot (-1, 0, 1, 0) + t \cdot (0, -1, 0, 1); s, t, \in R\}$
$\alpha_{Ker f} = [(-1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -1)]$

K určení obrazu daného zobrazení je nutné nejprve zobrazit prvky standartní báze podle daného předpisu:

$f(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 1, -2)$ tedy $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ dosadíme do předpisu $*$
$f(0, 1, 0, 0) = (1, -1, -1, 2)$
$f(0, 0, 1, 0) = (1, -1, 1, -2)$
$f(0, 0, 0, 1) = (1, -1, -1, 2)$

Ze zjištěných obrazů vybereme pouze ty lineárně nezávislé:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že LN jsou pouze vektory $e_1 = (1, 0, 0, 0)$ a $e_2 = (0, 1, 0, 0)$. Množinu obrazů tedy můžeme zapsat jako lineární kombinaci obrazů těchto vektorů:

$Im f = \{a_1 f(e_1) + a_2 f(e_2); a_1, a_2 \in R\} = \{a_1(1, -1, 1, -2) + a_2(1, -1, -1, 2; a_1, a_2 \in R)\}$
$\alpha_{Im f} = [(1, -1, 1, -2), (1, -1, -1, 2)]$

Matice lineárního zobrazení, matice přechodu

Mějme lineární zobrazení $f : U -> V$, v U je definovaná báze $\alpha = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, ve V báze $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$.
Matice lineárního zobrazení: $(f)_{\beta\alpha} = (f(u_1)_\beta, f(u_2)_\beta, \dots, f(u_n)_\beta)$
tedy obrazy vektorů báze vyjádřené v souřadnicích vzhledem k bázi β
$f(u_1) = a_1 v_1 + \dots, a_m v_m$

Matice přechodu od báze k bázi β:
$(id)_{\beta\alpha} : U -> U$, $(id)_{\beta\alpha}((u_1)_\beta, \dots (u_n)_\beta)$
vektory báze α v souřadnicích vzhledem k bázi β (pouze přechod od jedné báze k druhé, bez klasického zobrazení)
platí: $id_{\beta\alpha} = id^{-1}_{\alpha\beta}$
máme-li báze α a γ v U a β a δ ve V: (f)$_{\delta\gamma} = (id)_{\delta\beta} \cdot (f)_{\beta\alpha} \cdot (id)_{\alpha\gamma}$
pro souřadnice platí:
$(f(x))_\beta = (f)_{\beta\alpha} \cdot (x)_\alpha$
$(x)_\beta = (id)_{\beta\alpha} \cdot (x)_\alpha$

Příklad 13 *Určete matici lineárního zobrazení $f : R^3 -> R^2$, $f(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, 2x - 1)$ v bázích α, β:*

1. $\alpha = \varepsilon_3$, $\beta = \varepsilon_2$
2. $\alpha = \{(1, 2, 0), (-2, 1, 0, (3, 1, -1))\}$, $\beta = \{(2, 1), (0, 2)\}$

a najděte obraz vektoru x, jestliže $(x)_\alpha = (0, -4, 1)^T$

ad1)
Nejprve určíme obrazy vektorů z báze $\alpha = \varepsilon_3$ dosazením do předpisu:

$f(1, 0, 0) = (1, 2)$
$f(0, 1, 0) = (2, 0)$
$f(0, 0, 1) = (-3, 0)$

Nyní bychom měli určit prvky matice zobrazení jako koeficienty u lineární kombinace vektorů z báze $\beta = \varepsilon_2$. Protože se však jedná o standartní bázi, budou tyto koeficienty stejné jako již vypočítané obrazy.(položíme $(1, 2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1) => a_1 = 1, a_2 = 2$ a podobně pro zbylé dva vektory).

$$(f)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro nalezení obrazu vektoru x vypočteme nejprve souřadnice v bázi β podle vzorce:$(f(x))_\beta = (f)_{\beta\alpha} \cdot (x)_\alpha$ Protože β je v našem případě standartní báze, jsou souřadnice obrazu v této bázi právě ty, které byly požadovány:

$$(f(x))_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = (-11,0)^T = f(x)$$

adb)
$f(1,2,0) = (5,2)$
$f(-2,1,0) = (0,-4)$
$f(3,1,-1) = (8,6)$

$(5,2) = a_1 \cdot (2,1) + b_1 \cdot (0,2)$
$5 = 2a_1 => a_1 = \frac{5}{2}$
$a_1 + 2b_1 = 2 => b_1 = \frac{-1}{4}$

$(0,-4) = a_2 \cdot (2,1) + b_2 \cdot (0,2)$
$0 = 2a_2 => a_2 = 0$
$-4 = a_2 + 2b_2 => b_2 = -2$

$(8,6) = a_3 \cdot (2,1) + b_3 \cdot (0,2)$
$8 = 2a_3 => a_3 = 4$
$6 = a_3 + 2b_3 => b_3 = 1$

$$(f)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 4 \\ -1/4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{f(x)})_\beta = \begin{pmatrix} 5/2 & 0 & 4 \\ -1/4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = (4,9)^T$$

Tímto máme souřadnice obrazu vektoru x v bázi β. Potřebujeme je však určit obecně, tedy ve standartní bázi. Toho docílíme tak, že použijeme vypočtené souřadnice v bázi β jako koeficienty lineární kombinace vektorů z báze β a tuto lineární kombinaci vyčíslíme:

$f(x) = 4 \cdot (2,1) + 9 \cdot (0,2) = (8,22)$

Příklad 14 *Nechť* $f : R_1[x]- > R_1[x]$ *je lineární zobrazení definované předpisem* $f(a+bx) = a+b(x+1)$. *Najděte matici zobrazení* f *v bázi* $\gamma = \{6+3x, 10+2x\}$

$(f)_{\gamma\gamma} = (f(\gamma_1)_\gamma, f(\gamma_2)_\gamma)$
$f(\gamma_1) = f(6 + 3x) = 9 + 3x$
$f(\gamma_2) = f(10 + 2x) = 12 + 2x$

$9 + 3x = a \cdot (6 + 3x) + b \cdot (10 + 2x)$
$9 = 6a + 10b$
$3 = 3a + 2b$
$=> b = 1/2, a = 2/3$

$12 + 2X = c \cdot (6 + 3x) + d \cdot (10 + 2x)$
$12 = 6c + 10d$
$2 = 3c + 2d$
$=> d = 4/3, c = -2/9$

$$(f)_{\gamma\gamma} = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/9 \\ 1/2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Příklad 15 *V R^3 jsou dány báze $\alpha = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ a $\beta = \{(-1,1,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$ Určete matice $(id)_{\beta\alpha}$, $(id)_{\alpha\beta}$ a $(x)_\beta$, $(y)_\alpha$, jestliže $(x)_\alpha = (-1,3,0)^T$, $(y)_\beta = (2,4,7)^T$.*

V tomto příkladě nefiguruje žádné zobrazení, budeme tedy řešit pouze matice přechodu z jedné báze ke druhé.Chceme-li získat matici přechodu od báze α k bázi β, zapíšeme jednotlivé vektory báze α jako lineární kombinace vektorů báze β a vyčíslíme koeficienty.

$(1,0,0) = a_1 \cdot (-1,1,0) + b_1 \cdot (1,1,0) + c_1 \cdot (0,0,1)$
$1 = -a_1 + b_1$
$0 = a_1 + b_1$
$0 = c_1$
$a_1 = 1/2, b_1 = -1/2$

$(1,1,0) = a_2 \cdot (-1,1,0) + b_2 \cdot (1,1,0) + c_2 \cdot (0,0,1)$
$c_2 = 0, b_2 = 1, a_2 = 0$

$(1,1,1) = a_3 \cdot (-1,1,0) + b_3 \cdot (1,1,0) + c_3 \cdot (0,0,1)$
$c_3 = 0, b_3 = 1, a_3 = 0$

$$(id)_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matici přechodu od β k α můžeme spočítat stejným způsobem, nebo jednoduše jako inverzní matici k $(id)_{\beta\alpha}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(id)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x)_\beta = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 5/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{y})_\alpha = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Příklad 16 *Nechť jsou dány báze α a β stejné jako v předchozích příkladech. Nechť f je lineární zobrazení s maticí v bázi α:* $(f)_{\alpha\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Určete jeho matici v bázi β*

$$(f)_{\beta\beta} = (id)_{\beta\alpha} \cdot (f)_{\alpha\alpha} \cdot (id)_{\alpha\beta}$$
$$(f)_{\beta\beta} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 17 *Určete matici lineárního zobrazení z předchozího příkladu ve standartní bázi a najděte jeho předpis.*

Matici přechodu od báze α k ε získáme jednoduše zapsáním vektorů matice α do sloupců. Opačnou matici přechodu dostaneme jako inverzi.

$$(id)_{\varepsilon\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$(id)_{\alpha\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(f)_{\varepsilon\varepsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Předpis získáme vynásobením matice zobrazení ve standartní bázi obecným vektorem $(x_1, x_2, x_3)^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$f(x) = (2x_1, x_1 + x_2 - x_3, x_2)$$