

# Vlastní čísla, vlastní vektory

Vlastní číslo čtvercové matice  $A$  řádu  $n$  je takové číslo  $\lambda \in \mathbf{C}$ , pro které existuje alespoň jeden nenulový vektor tak, že  $Au = \lambda u$ . Vektor  $u$  se nazývá vlastní vektor matice  $A$  příslušející vlastnímu číslu  $\lambda$ .

Výpočet:  $(A - \lambda E) \cdot u = 0$

$\det|A - \lambda E| = 0$  – vlastní čísla získáme z tohoto tzv. charakteristického polynomu

Algebraická násobnost vlastního čísla  $\lambda$  = násobnost  $\lambda$  jakožto kořene charakteristického polynomu

Geometrická násobnost = dimenze množiny všech vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu  $\lambda$

diagonalizace matice  $A$ :

- lze provést má-li matice řádu  $n$  právě  $n$  lineárně nezávislých vlastních vektorů  
Nechť  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  jsou vlastní čísla (ne nutně různá) a  $u_1, u_2, \dots, u_n$  příslušné LN vlastní vektory. Pak platí:

$$A = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

kde  $P = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  je diagonalizace

Je-li matice  $A$  symetrická, jsou vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům na sebe kolmé (ortogonální).

**Příklad 1** Najděte vlastní čísla a vlastní vektory dané matice a pokud existuje, i její diagonalizaci.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \lambda(4-\lambda)(2-\lambda) + 4(2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \\ (2-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$$

$$\lambda = 2 : \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x_3 = t, x_2 = s, x_1 = 1/2s$$

$$\{(s, 2s, t), s, t \in R\} = [(1, 2, 0), (0, 0, 1)]$$

dimenze množiny vl.vektorů je 2, zatímco řád matice 3. Diagonalizaci tedy nelze provést.

**Příklad 2**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda^2+2\lambda \\ 0 & 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & -\lambda^2+2\lambda \\ 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ 0 & 2-\lambda & \lambda-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -[(2-\lambda)^2(\lambda^2-2) - (2-\lambda^2)(\lambda-2) - (2-\lambda)^2(\lambda-2)] = -[(2\lambda)^2(2\lambda-\lambda^2-\lambda+2-\lambda+2)] = -[(2-\lambda)^2(\lambda^2+4)] = (2-\lambda)^2(\lambda^2-4) = (2-\lambda)^2(\lambda-2)(\lambda+2) = 0$$

$$\lambda_{1,2,3} = 2, \lambda_4 = -2$$

$$\lambda = 2 : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = t, x_3 = s, x_2 = p, x_1 = p + s + t$$

$$\{(p + s + t, p, s, t), t, s, p \in R\} = [(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0)]$$

$$\lambda = -2 : \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = t, x_3 = t, x_2 = t, x_1 = -t$$

$$[(1, -1, -1, -1)]$$

protože je dimenze stejná jako řád matice, můžeme provést diagonalizaci:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Příklad 3** Najděte diagonalizaci matice  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & -3 \\ 4 & 5-\lambda & -4 \\ 6 & 4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2(-4-\lambda) - 48 - 48 + 18(5-\lambda) + 16(5-\lambda) + 8(4+\lambda) = (\lambda^2 - 10\lambda + 25)(-4-\lambda) - 96 + 90 - 18\lambda + 80 - 16\lambda + 32 + 8\lambda = -4\lambda^2 + 40\lambda - 100 - \lambda^3 + 10\lambda^2 - 25\lambda + 106 - 26\lambda = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = t, x_2 = -t/2, x_1 = t/2 \\ [(1, 1, 2)]$$

$$\lambda_2 = 2: \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = t, x_2 = 0, x_1 = t \\ [(1, 0, 1)]$$

$$\lambda_3 = 3: \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -4 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = t, x_2 = t, x_1 = t/2 \\ [(1, 2, 2)]$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

**Příklad 4** Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) + 2 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_1 = 2 + i, \lambda_2 = 2 - i$$

$$\lambda_1 = 2 + i : \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-(1+i)}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x_2 = t, x_1 = \frac{1-i}{2}t$$

$$[(1-i), 2]$$

$$\lambda_2 = 2 - i : \begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$x_2 = t, x_1 = \frac{1+i}{2}t$$

$$[(1+i), 2]$$

Poznámka: Pokud by zadání příkladu znělo: Nalezněte ortogonální diagonalizaci matice, je třeba najít vlastní čísla, jim příslušné vlastní vektory normalizovat. Takto vytvořené ortonormální vektory pak tvoří sloupce diagonalizace.