PŘÍKLADY CVIČENÍ 29.10.

Příklad 1 *Napište v goniometrickém tvaru komplexní číslo* $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Řešení
Číslo bude tvaru

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$

kde $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{|z|}$, $\cos\alpha = \frac{-1}{|z|} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\Pi}{3}$.

Tedy

$$z = 2\left(\cos\frac{2\Pi}{3} + i\sin\alpha\frac{2\Pi}{3}\right)$$

Příklad 2 (Moivreova věta) *Nechť* $x = 9-2i$, $y = -3-4i$, *spočtěte* $(x+y)^4$.

Řešení
$(x+y)^4 = (6-6i)^4$
Vyjádříme nejprve $z = 6-6i$ *v goniometrickém tvaru:*

$$\begin{aligned} z = 6-6i &= |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ &= 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\Pi}{4} + i\sin\frac{7\Pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Nyní

$$z^4 = (6\sqrt{2})^4\left(\cos 4\frac{7\Pi}{4} + i\sin 4\frac{7\Pi}{4}\right) = 6^4 4(-1+0) = -6^4 4.$$

Příklad 3 (Moivreova věta) *Řešte rovnici*

$$z^3 = 8i.$$

Řešení
$8i$ *v goniometrickém tvaru:*

$$8i = 8\left(\cos\frac{\Pi}{2} + i\sin\frac{\Pi}{2}\right)$$

Po odmocnění:

$$z = \sqrt[3]{8i} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\Pi}{2} + 2k\Pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\Pi}{2} + 2k\Pi}{3}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\Pi}{6} + \frac{2k\Pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\Pi}{6} + \frac{2k\Pi}{3}\right)\right)$$

Rovnice má 3 řešení:

Pro $k=0$:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{\Pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\Pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$$

Pro $k=1$:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{5\Pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\Pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

Pro $k=2$:

$$z = 2\left(\cos\left(\frac{9\Pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\Pi}{6}\right)\right) = -2i$$

Příklad 4 (Rotace v rovině pomocí komplexních čísel) *Rotujte vektor* $(2,1)$ *o 30°.*

Trocha teorie*: vektor (x,y) napíšeme jako komplexní číslo $x+iy$ a rotujeme ho o úhel φ tak, že toto komplexní číslo vynásobíme tzv. "komplexní jednotkou"*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

a dostáváme zrotovaný vektor (x', y')

Řešení

$$\begin{aligned} x' + iy' &= (2+i)(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}) \\ &= (2cos\frac{\pi}{6} - sin\frac{\pi}{6}) + i(2sin\frac{\pi}{6} + cos\frac{\pi}{6}) \\ &= (\sqrt{3} - \frac{1}{2}) + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) \end{aligned}$$

Rotovaný vektor má souřadnice: $(\sqrt{3} - \frac{1}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Příklad 5 *Napište všechny matice A_{2x2} takové, že $A^2 = E$.*

Řešení

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Tedy řešíme rovnici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešit lze buď rozepsáním těchto rovnic, což je ale zdlouhavé a snadno můžeme udělat chybu (u 6.té mocniny téměř jistě).
Nabízí se elegantnější řešení: na A můžeme pohlížet jako na rotační matici, která vektor (x, y) po dvou vynásobeních zobrazí zpátky na sebe. Z pohledu na jednotkovou kružnici jasně vidíme, že to musí být matice rotace o úhel $180° = \pi$ (např. vektor $(1, 0)$ se po prvním vynásobení rotační maticí zobrazí na vektor $(-1, 0)$, ten znova vynásobíme rot.mat. a dostáváme zpět vektor $(1, 0)$).

Takže jedním řešením je rotační matice

$$\begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Jako každá kvadratická rovnice má ovšem i tato 2 řešení a tím druhým je identita, tedy vektor se zobrazí sám na sebe hned po prvním vynásobením rotační maticí, tedy i po druhém, po třetím také, ..., po miliontém také,...
Opět na jednotkové kružnici rotací vektoru $(1, 0)$ vidíme, že abychom dosáhli původního vektoru $(1, 0)$ hned po prvním vynásobení, musí to být rotační matice o 360°, tedy 2π:

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi & -\sin 2\pi \\ \sin 2\pi & \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Jak už bylo řečeno, je to identita, proto nám právem vyšla jednotková matice.)

Množinu řešení tedy můžeme pomocí jedné matice zapsat následovně:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \cos k\pi & -\sin k\pi \\ \sin k\pi & \cos k\pi \end{pmatrix}_{k=1,2} \right\}$$

Příklad 6 (Zrcadlení v R^2) *Zrcadlete bod $[2, 1]$ podle přímky*

a) $x = y$

b) $x = 0$ *(y-ová osa!!!!)*

c) $y = 0$ *(x-ová osa!!!!)*

Trocha teorie: *matice zrcadlení*

$$Z = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix},$$

kde φ je úhel, který svírá osa zrcadlení (nebo chcete-li osa souměrnosti) s osou x. Zrcadlíme-li vektor (x, y), dostaneme "v zrcadle"vektor (x', y') takto:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Řešení

a)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\cdot 90^\circ & \sin 2\cdot 90^\circ \\ \sin 2\cdot 90^\circ & -\cos 2\cdot 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\cdot 45^\circ & \sin 2\cdot 45^\circ \\ \sin 2\cdot 45^\circ & -\cos 2\cdot 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\cdot 0^\circ & \sin 2\cdot 0^\circ \\ \sin 2\cdot 0^\circ & -\cos 2\cdot 0^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pokud by nám osa neprocházela počátkem, museli bychom stejně jako u rotace posunout vektor do počátku, zrcadlit a posunout zpět.