Soustavy lineárních rovnic
(*Částečná náhrada odpadlého cvičení - V. Švendová*)

Řešíme-li soustavu lineárních rovnic, znamená to, že chceme najít takové hodnoty proměnných, které vyhovují všem rovnicím současně. Jak víme, řešení buď

a) neexistuje

b) existuje právě jedno

c) existuje nekonečně mnoho

Máme-li soustavu 2 rovnic o 2 neznámých, např.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

vyřešíme ji jednoduše "dosazením jedné do druhé":

$$\begin{aligned} x_2 = 3 - 2x_1 & \qquad x_2 = -1 \\ x_1 = 1 - x_2 & \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \end{aligned}$$

Tento způsob, který všichni znáte a používáte, už při soustavě 3 rovnic o 3 neznámých začíná být otravně nepřehledný a při vyšších soustavách téměř nemožný. Díky maticovému zápisu soustavy ovšem tento způsob můžeme velice elegantně použít bez potřeby týdne volna na výpočet.
Obdobou (vpodstatě tím úplně stejným) jako "dosazení jedné do druhé", je "sečtení násobku jedné s násobkem druhé":

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 1 \quad |(-2) \\ &\Downarrow \\ 2x_1 - 2x_1 + x_2 - 2x_2 &= 3 - 2 \end{aligned}$$

(druhou jsme vynásobili -2 a první přičetli ke druhé) a dostáváme totéž co předtím, tedy $x_2 = -1$, $x_1 = 2$.
Úprava "sečtení násobku jedné s násobkem druhé"se nazývá **řádková úprava** a úplně stejný postup používáme při řešení soustav vyššího řádu, jen si soustavu pro přehlednost a jednoduchost přepíšeme do matice.

Na příkladech nyní projděme všechny tři možnosti výsledků řešení soustav.

Příklad a)

Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Řešení:

Soustavu přepíšeme do matice (i-tý sloupec znázorňuje x_i a svislá čára znázorňuje rovnítko) a upravujeme pomocí řádkových úprav:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \widetilde{1.krok} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & -6 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \widetilde{2.krok} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right)$$

1.krok: 2. řádek vynásoben -2 a přičten k 1. (výsledek zapsán do 2. řádku),
3. řádek vynásoben -2 a přečten k 1. (výsledek zapsán do 3. řádku),
4. řádek vynásoben -1 a přičten k 1. (výsledek zapsán do 4. řádku).
2.krok: 2. řádek přičten ke 3. (výsledek zapsán do 3.)

Na první pohled vidíme, že ve třetím řádku dostáváme:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -8,$$

čemuž nemůže odpovídat žádná ctveřice $x_1, \ldots, x_4$, proto soustava **NEMÁ ŘEŠENÍ**.

Příklad b)

Řešte soustavu rovnic ze začátku tohoto textu:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Řešení

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \widetilde{1.krok} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy $2x_1 + x_2 = 3$ a $-x_2 = 1$, z čehož $x_2 = -1$, $x_1 = 2$. Soustava má tedy **JEDNO ŘEŠENÍ**, a to

$$(x_1, x_2) = (2, -1)$$

Příklad c)

Řeště soustavu rovnic.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ x_1 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Řešení

Opět soustavu přepíšeme do matice a upravujeme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) 1.\widetilde{krok} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) 2.\widetilde{krok} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$3.\widetilde{krok} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

V jednotlivých krocích jsme postupovali obdobně jako v předchozích příkladech (v 3. kroku pouze od 1. řádku odečtu druhý a výsledek zapíšu do 1.řádku).
Vidíme, že poslední řádek se nám vynuloval celý. Co to znamená? Přepišme si upravenou matici zpět na soustavu s x_i-čkama:

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Poslední rovnice pro nás nemá žádnou informační hodnotu (platí pro libovolná čísla x_1, x_2, x_3), proto zbývají první 2 rovnice o 3 (!) neznámých. Znamená to, že řešení bude více a je třeba je vyjádřit pomocí parametru. Zafixujeme si libovolnou ze tří proměnných, např. x_3 a pojmenujme $x_3 := t$ (parametr), a vyjádříme zbylé proměnné: $x_2 = 2t$, $x_1 = 2 + t$.
Tím dostáváme všechna možná řešení soustavy. Zapsáno do vektoru:

$$(x_1, x_2, x_3) = (2 + t, 2t, t)$$

pro libovolné t reálné číslo. Soustava má tedy **NEKONEČNĚ MNOHO ŘEŠENÍ**.
Stejně tak bychom si mohli zafixovat např. proměnnou $x_1 = s$ a dostat řešení

$$(x_1, x_2, x_3) = (s, 2s - 4, s - 2),$$

pro lib. číslo s, což je totéž jako předchozí (zkuste např. požadovat první proměnnou rovnu $3 \to t = 1, s = 3$).

Poznámka

Uvedenému postupu, kdy se snažíme převést matici na schodovitý tvar a dostat pod (případně i nad) diagonálu nuly, se také říká **Gaussova eliminace**.

Matice původní a matice upravená jsou ekvivalentní! Obecně smysl převádění na schodovitý tvar je ten, že čím více nul v matici, tím snáze se s ní počítá (ať už cokoli) - ušetříme výpočty sobě i počítači.