$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Dokážeme MI:

i) $n=1$: $L = 1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 = P$ ✓

ii) nechť tvrzení platí pro všechna $n \leq k$, ukážeme jej pro $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 \overset{\text{I.P.}}{=} \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{(k^2+k)(2k+1) + 6k^2 + 12k + 6}{6} =$$

$$= \frac{2k^3+3k^2+k+6k^2+12k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \quad ✓$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} =$$

$$= \frac{(k^2+3k+2)(2k+3)}{6} = \frac{2k^3+6k^2+4k+3k^2+9k+6}{6} =$$

$$= \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \quad ✓$$

Označme p_n počet částí, na které maximálně dělí n přímek rovinu.

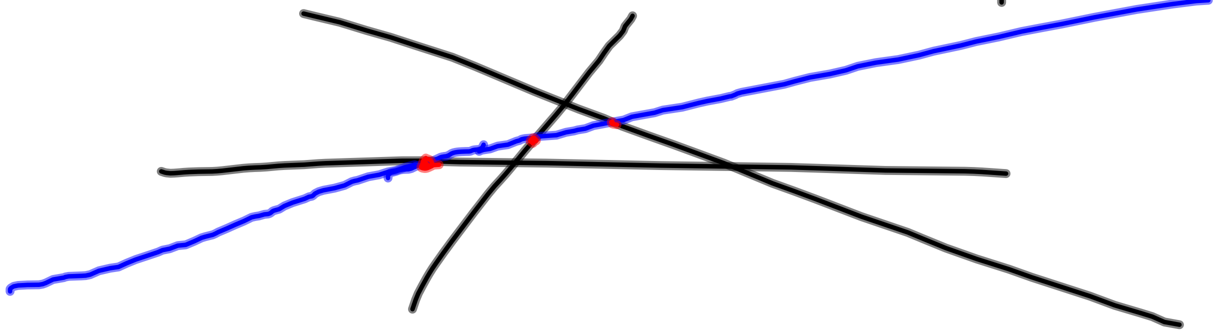
$$S = 1 + 2 + \dots + n$$
$$S = n + (n-1) + \dots + 1$$
$$2S = n(n+1)$$

Pozorování: $p_0 = 1$

$p_1 = 2$

v rovině $(n-1)$ přímek; n-tá přímka s nimi má $(n-1)$ průsečíků

$$p_n = p_{n-1} + n$$



$$p_n = n + p_{n-1} = n + (n-1) + p_{n-2} = \dots = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 + p_0 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}$$

Označme hledaný počet r_n. Zřejmě

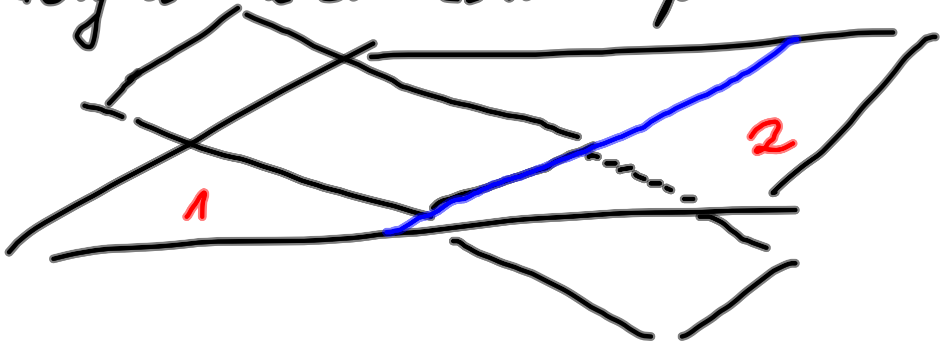
$r_0 = 1$

$r_1 = 2$

Pokud máme v prostoru $(n-1)$ rovin a přidám n-tou, tak nám přibude právě tolik oblastí, kolika "starými" částmi n-tá rovina prochází. Ale průsečnice s $(n-1)$ rovinami rozdělí n-tou rovinu maximálně na

$$\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2}$$

částí, které odpovídají částem prostoru, kterými n-tá rovina prochází.



$$r_n = r_{n-1} + \frac{n^2 - n + 2}{2} = r_{n-1} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 =$$

$$= r_{n-2} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n-1}{2} - \frac{n}{2} + 1 + 1 =$$

$$= \ldots$$

$$= r_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i + n =$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} + n =$$

$$= \frac{12 + 12n + (n^2+n)(2n+1) - 3n^2 - 3n}{12} = \frac{12 + 12n + 2n^3 + 3n^2 + \overset{3n^2}{\overset{3n}{n}}}{12} =$$

$$= \frac{2n^3 + 10n + 12}{12} = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}$$

i) pro jedno číslo platí

ii) nechť libovolných k přirozených čísel si je rovno a vezměme libovolných $(k+1)$ př. čísel. Označme je $n_1, n_2, \dots, n_{k+1}$ a rozdělme do dvou množin: $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, $\{n_2, n_3, \dots, n_{k+1}\}$.

Podle IP je $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ i $n_2 = n_3 = \dots = n_{k+1}$

Úroková míra za měsíc 0,5 %. Označíme-li dlužnou částku po uplynutí n-tého měsíce jako r_n, pak

$$r_0 = 300\,000 \text{ Kč}$$

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$
$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$
$$(q-1)S = q^{n+1} - 1$$
$$S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$r_1 = 1{,}005 \cdot r_0 - s$$

↑ splátka

obecně

$$r_{n+1} = 1{,}005 \cdot r_n - s = 1{,}005\,(1{,}005\, r_{n-1} - s) - s =$$

$$= 1{,}005\,(1{,}005\,(\underbrace{1{,}005\, r_{n-2} - s}) - s) - s =$$

$$= 1{,}005^{n+1} r_0 - s\,(1 + 1{,}005 + 1{,}005^2 + \dots + 1{,}005^n)$$

$$= 1{,}005^{n+1} r_0 - s \left(\frac{1{,}005^{n+1} - 1}{1{,}005 - 1} \right)$$

Podmínka $r_{36} = 0$.

$$0 = 1{,}005^{36} \cdot 3 \cdot 10^5 - s\left(\frac{1{,}005^{36} - 1}{0{,}005}\right)$$

$$s = \frac{1{,}005^{36} \cdot 3 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{1{,}005^{36} - 1} \doteq 9126$$

$$r_{72} = 0 \Rightarrow s \doteq 4971$$

Pokud by Mirek chtěl splácet 2 000 Kč měsíčně, jak dlouho by splácel? Hledáme tedy n takové, že $r_n = 0$, neboli

$$0 = 1{,}005^{n} \cdot 3 \cdot 10^5 - s\left(\frac{1{,}005^{n} - 1}{0{,}005}\right)$$

$$0 = 1{,}005^{n} \cdot 15 \cdot 10^2 - s\left(1{,}005^{n} - 1\right)$$

$$1{,}005^n = \frac{s}{s-1500} \Rightarrow n \cdot \ln(1{,}005) = \ln\left(\frac{s}{s-1500}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{s}{s-1500}\right)}{\ln(1{,}005)} = \frac{\ln(4)}{\ln(1{,}005)} \doteq$$

67 let

$$\frac{14!}{8\cdot 7\cdot 6}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{(10-4)!\cdot 4!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!} \quad \text{(výběr delegací)}$$

$$\binom{8}{4} \;\ldots\; \text{výběr dívek}$$

Celkem podle pravidla součinu.

$$\underbrace{\binom{10}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot 4!}$$

$$\underbrace{\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet}_{x_1}\;\Big|\;\underbrace{\bullet\;\bullet\;\bullet}_{x_2}\;\Big|\;\underbrace{\bullet\;\bullet\;\bullet\;\bullet}_{x_3}$$

$$\bullet \quad \Big| \quad \bullet \quad \Big| \quad \bullet$$

Různých řešení je tolik, kolik je posloupností 97 kuliček a 2 oddělovačů, těch je

$$\binom{99}{2} = \frac{99!}{97! \cdot 2!}$$