

Elementární lineární algebra

*neumíte ještě počítat se skaláry?
– zkusme to rovnou s maticemi...*

1. Vektory a matice

Se soustavami lineárních rovnic se čtenář jistě již setkal na střední škole. Řešení soustavy lineárních rovnic je jedním z nejjednodušších problémů, se kterými se člověk může setkat v praxi.

2.1. A teď vám to pěkně natřeme. Firma zabývající se velkoplošnými ná-
těry si objednala 810 litrů barvy, která má obsahovat stejné množství červené,
zelené a modré barvy (tj. 810 litrů černé barvy). Obchod může splnit tuto
zakázku smícháním běžně prodávaných barev (má skladem jejich dostatečné
zásoby), a to

- načervenalé barvy – obsahuje 50 % červené, 25 % zelené a 25 % modré barvy;
- nazelenalé barvy – obsahuje 12,5 % červené, 75 % zelené a 12,5 % modré barvy;
- namodralé barvy – obsahuje 20 % červené, 20 % zelené a 60 % modré barvy.

Kolik litrů od každé z uskladněných barev se musí smíchat, aby byly splněny požadavky zákazníka?

Řešení. Označme jako

- x – množství (v litrech) načervenalé barvy, které se použije;
- y – množství (v litrech) nazelenalé barvy, které se použije;
- z – množství (v litrech) namodralé barvy, které se použije.

Smícháním barev chceme získat barvu, která bude obsahovat 270 litrů červené barvy. Uvědomme si, že načervenalá barva obsahuje 50 % červené, nazelenalá obsahuje 12,5 % červené a namodralá 20 % červené barvy. Musí tudíž platit

$$0,5x + 0,125y + 0,2z = 270.$$

Analogicky požadujeme (pro zelenou a modrou barvu)

$$\begin{aligned} 0,25x + 0,75y + 0,2z &= 270, \\ 0,25x + 0,125y + 0,6z &= 270. \end{aligned}$$

Rozšířenou matici tohoto systému postupně upravíme

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0,5 & 0,125 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,75 & 0,2 & 270 \\ 0,25 & 0,125 & 0,6 & 270 \end{array} \right) \underset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0,25 & 0,4 & 540 \\ 1 & 3 & 0,8 & 1080 \\ 1 & 0,5 & 2,4 & 1080 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,4 & | & 540 \\ 0 & 2,75 & 0,4 & | & 540 \\ 0 & 0,25 & 2 & | & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,4 & | & 540 \\ 0 & 11 & 1,6 & | & 2160 \\ 0 & 1 & 8 & | & 2160 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,4 & | & 540 \\ 0 & 1 & 8 & | & 2160 \\ 0 & 11 & 1,6 & | & 2160 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0,25 & 0,4 & | & 540 \\ 0 & 1 & 8 & | & 2160 \\ 0 & 0 & -86,4 & | & -21600 \end{pmatrix}.$$

Odtud již zpětně vypočítáme

$$z = \frac{-21600}{-86,4} = 250, \\ y = 2160 - 8 \cdot 250 = 160, \\ x = 540 - 0,4 \cdot 250 - 0,25 \cdot 160 = 400.$$

Je tedy potřeba smísit po řadě 400 l, 160 l, 250 l uvedených barev. \square

2.2. Účastníci zájezdu. Dvoudenního autobusového zájezdu se zúčastnilo 45 osob. První den se platilo vstupné na rozhlednu 30 Kč za dospělého, 16 Kč za dítě a 24 Kč za důchodce, celkem 1 116 Kč. Druhý den se platilo vstupné do botanické zahrady 40 Kč za dospělého, 24 Kč za dítě a 34 Kč za důchodce, celkem 1 542 Kč. Kolik bylo mezi výletníky dospělých, dětí a důchodců?

Řešení. Zavedme proměnné

x udávající „počet dospělých“;

y udávající „počet dětí“;

z udávající „počet důchodců“.

Zájezdu se zúčastnilo 45 osob, a proto

$$x + y + z = 45.$$

Celkové vstupné na rozhlednu a do botanické zahrady při zavedení našich proměnných a při zachování pořadí činí $30x + 16y + 24z$ a $40x + 24y + 34z$. My je ovšem známe (1 116 Kč a 1 542 Kč). Máme tak

$$\begin{aligned} 30x + 16y + 24z &= 1116, \\ 40x + 24y + 34z &= 1542. \end{aligned}$$

Soustavu tří lineárních rovnic zapíšeme maticově jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 1116 \\ 1542 \end{pmatrix}.$$

Řešením je

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 45 \\ 1116 \\ 1542 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 132 \\ 72 \\ 66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 11 \end{pmatrix},$$

neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 30 & 16 & 24 \\ 40 & 24 & 34 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 16 & 5 & -4 \\ 30 & 3 & -3 \\ -40 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Slovně vyjádřeno, zájezdu se zúčastnilo 22 dospělých, 12 dětí, 11 důchodců. \square

V předchozích příkladech měla úloha vždy jedno řešení. Musí tomu tak vždy být? Nikoliv. Jak možná čtenář již ví, tak systém lineárních rovnic buď

nemá řešení, nebo má jedno řešení, nebo jich má nekonečně mnoho (například nemůže mít právě dvě řešení). To je dáno tím, že prostor řešení je buď vektorový prostor (pravá strana všech rovnic v systému je nulová, hovoříme o *homogenním* systému lineárních rovnic) nebo afinní prostor (pravá strana alespoň jedné z rovnic je nenulová, hovoříme o *nehomogenním* systému lineárních rovnic). Ukažme si tedy různé možné typy řešení soustavy lineárních rovnic na příkladech. Při řešení budeme využívat maticového zápisu.

2.3. Vyřešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 + 16x_2 + 7x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0, \\ -7x_1 + 7x_2 + -10x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Uvedenou soustavu rovnic zapíšeme maticí tak, že první rovnice bude odpovídat prvnímu řádku matice, druhá rovnice druhému řádku atd. a v prvním sloupci budou koeficienty u x_1 , ve druhém sloupci koeficienty u x_2 , až ve čtvrtém sloupci (za svislou čarou oddělující levou stranu rovnic od pravé) absolutní členy. To znamená, že matice zadané soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & 7 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right), \text{ resp. } \left(\begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 16 & 7 \\ 3 & -5 & 4 \\ -7 & 7 & -10 \end{array} \right).$$

Protože řešíme homogenní soustavu, můžeme (a budeme) nulový sloupec na pravé straně vynechávat. Řešení nalezneme převodem na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových transformací, které odpovídají záměně pořadí rovnic, vynásobení rovnice nenulovým číslem a přičítání násobků rovnic. Navíc můžeme kdykoli od maticového zápisu přejít zpět k zápisu rovnic s neznámými x_i . Nejprve docílíme toho, aby se proměnná x_1 vyskytovala pouze v první rovnici. Zřejmě postačuje $(-3/2)$ násobek prvního řádku přičíst ke druhému a ke třetímu řádku a jeho $(7/2)$ násobek k poslednímu řádku, což v maticovém zápisu dává

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & 7 & 0 \\ 3 & -5 & 4 & 0 \\ -7 & 7 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 35/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & -7/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right).$$

Odtud je vidět, že druhá, třetí a čtvrtá rovnice jsou násobky rovnice $7x_2 + x_3 = 0$. Při maticovém zápisu můžeme např. $(1/5)$ násobek druhého řádku přičíst ke třetímu a jeho $(-1/5)$ násobek k poslednímu řádku, čímž obdržíme schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 35/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & -7/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 35/2 & 5/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

který jsme v posledním kroku zjednodušili tak, že jsem druhý řádek (druhou rovnici) vynásobili číslem $2/5$. Přestože byly zadány čtyři rovnice pro tři neznámé, má celá soustava nekonečně mnoho řešení, neboť pro libovolné $x_3 \in \mathbb{R}$

mají rovnice

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

řešení. Nahradíme tak proměnnou x_3 parametrem $t \in \mathbb{R}$ a vyjádříme

$$x_2 = -\frac{1}{7}x_3 = -\frac{1}{7}t \quad \text{a} \quad x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3) = -\frac{11}{7}t.$$

Pokud ještě nahradíme $t = -7s$, obdržíme výsledek v jednoduchém tvaru

$$(x_1, x_2, x_3) = (11s, s, -7s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

□

2.4. Vypočtěte

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -3, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení. Zadanou soustavu lineárních rovnic zapíšeme ve tvaru rozšířené matice

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right),$$

kteřou pomocí elementárních řádkových transformací postupně převedeme na schodovitý tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -7 & -7 \\ 0 & 7 & 11 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \right).$$

Nejdříve jsme přitom (-2) násobek prvního řádku přičetli ke druhému a jeho 3 násobek ke třetímu. Poté jsme sečetli druhý a třetí řádek (součet napsali do třetího řádku) a druhý řádek vynásobili číslem $-1/7$. Přejdeme nyní zpět k soustavě rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že $x_3 = -1$. Dosadíme-li $x_3 = -1$ do rovnice $x_2 + x_3 = 1$, dostaneme $x_2 = 2$. Podobně dosazení získaných hodnot $x_3 = -1$, $x_2 = 2$ do první rovnice dává $x_1 = 1$. □

2.5. Nalezněte všechna řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_3 - 5x_4 &= -8, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -2, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -3. \end{aligned}$$

Řešení. Soustavě rovnic odpovídá rozšířená matice

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right).$$

Záměnou pořadí řádků (rovníc) potom obdržíme matici

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array} \right),$$

kteřou převedeme na schodovitý tvar postupným přičítáním násobku některého řádku k řádku jinému. Nejprve přičteme (-2) násobek, 2 násobek a (-3) násobek prvního řádku po řadě ke druhému, třetímu a čtvrtému řádku, čímž získáme 0 pod prvním nenulovým číslem v prvním řádku. Analogicky poté získáme 0 pod prvním nenulovým číslem ve druhém řádku tak, že tento řádek a jeho (-1) násobek přičteme po řadě ke třetímu a čtvrtému řádku. Takto dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & -8 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Odtud vyplývá (čtvrtý řádek je pouhou kopií třetího – lze jej tedy „vynulovat“), že soustava bude mít nekonečně mnoho řešení, neboť dostáváme tři rovnice pro čtyři neznámé, které očividně budou mít právě jedno řešení pro každou volbu proměnné $x_4 \in \mathbb{R}$. Neznámou x_4 proto nahradíme parametrem $t \in \mathbb{R}$ a od maticového zápisu přejdeme zpět k rovnicím

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - t &= -2, \\ 3x_2 - 3x_3 + t &= 1, \\ 3x_3 - 3t &= -3. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice máme $x_3 = t - 1$. Dosazení za x_3 do druhé rovnice potom dává

$$3x_2 - 3t + 3 + t = 1, \quad \text{tj.} \quad x_2 = \frac{1}{3}(2t - 2).$$

Konečně podle první rovnice je

$$x_1 - \frac{1}{3}(2t - 2) + t - 1 - t = -2, \quad \text{tj.} \quad x_1 = \frac{1}{3}(2t - 5).$$

Množinu řešení můžeme tudíž zapsat (pro $t = 3s$) ve tvaru

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(2s - \frac{5}{3}, 2s - \frac{2}{3}, 3s - 1, 3s \right), s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nyní se vraťme k rozšířené matici naší soustavy a upravujme ji dále užitím řádkových transformací tak, aby (při schodovitém tvaru) první nenulové číslo každého řádku bylo právě číslo 1 a aby všechna ostatní čísla v jeho sloupci byla 0. Platí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2/3 & -5/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

přičemž nejdříve jsme vynásobili druhý a třetí řádek číslem $1/3$, pak přičetli třetí řádek ke druhému a jeho (-1) násobek k prvnímu a na závěr přičetli druhý řádek k prvnímu. Z poslední matice snadno dostáváme výsledek

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/3 \\ -2/3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Stačí si pouze uvědomit, že proměnnou, které odpovídá ve schodovitém tvaru sloupec bez prvního nenulového čísla nějakého řádku, nahrazujeme za parametr a převádíme ji na pravou stranu rovnic (bereme (-1) násobek). \square

2.6. Určete řešení systému rovnic

$$\begin{array}{rccccrcrcrcr} 3x_1 & & & + & 3x_3 & - & 5x_4 & = & 8, \\ x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & -2, \\ -2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 0, \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení. Uvědomme si, že soustava rovnic v tomto příkladu se od soustavy z příkladu předešlého liší pouze v hodnotě 8 (místo -8) na pravé straně první rovnice. Provedeme-li totožné řádkové úpravy jako v minulém příkladu, obdržíme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & -5 & 8 \end{array} \right) \sim \dots \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 13 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{array} \right),$$

kde poslední úpravou bylo odečtení třetího řádku od čtvrtého. Ze čtvrté rovnice $0 = 16$ vyplývá, že soustava nemá řešení. Vyzdvihneme, že při úpravě na schodovitý tvar obdržíme rovnici $0 = a$ pro nějaké $a \neq 0$ (tj. nulový řádek na levé straně a nenulové číslo za svislou čarou) právě tehdy, když soustava nemá řešení. \square

2.7. Řešte soustavu

$$\begin{array}{rccccrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 3, \\ & & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & - & 4x_5 & = & 5, \\ -x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & 0, \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & & & & - & 6x_5 & = & 2. \end{array}$$

Řešení. Rozšířená matice soustavy je

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & -6 & 2 \end{array} \right).$$

Přičtením prvního řádku ke třetímu a jeho dvojnásobku ke čtvrtému a poté přičtením $(-5/2)$ násobku druhého řádku ke čtvrtému obdržíme

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 2 & -10 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & -9/2 \end{array} \right).$$

Poslední řádek je zřejmě násobkem předposledního, a tak jej můžeme vynechat. První nenulové číslo prvního řádku je v prvním sloupci, druhého řádku ve druhém sloupci a třetího řádku ve čtvrtém sloupci. Proto proměnné x_3 a x_5 (odpovídající třetímu a pátému sloupci) nahradíme reálnými parametry t , s . Uvažujeme tak soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + t + x_4 - 2s &= 3, \\ 2x_2 + 2t + 2x_4 - 4s &= 5, \\ 2x_4 &= 3. \end{aligned}$$

Víme tedy, že $x_4 = 3/2$. Druhá rovnice dává

$$2x_2 + 2t + 3 - 4s = 5, \quad \text{tj.} \quad x_2 = 1 - t + 2s.$$

Z první potom plyne

$$x_1 + 1 - t + 2s + t + 3/2 - 2s = 3, \quad \text{tj.} \quad x_1 = 1/2.$$

Celkem máme

ves0016

$$(2.1) \quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1/2, 1 - t + 2s, t, 3/2, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Také v tomto příkladu znovu uvažujeme rozšířenou matici a převedme ji pomocí řádkových úprav do schodovitého tvaru, kde první nenulové číslo v každém řádku je 1 a kde ve sloupci, ve kterém tato 1 je, jsou ostatní čísla 0. Ještě připomeňme, že čtvrtou rovnici, jež je kombinací prvních třech rovnic, budeme vynechávat. Po řadě vynásobením druhého a třetího řádku číslem $1/2$, odečtením třetího řádku od druhého a od prvního a odečtením druhého řádku od prvního získáme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right) \sim \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3/2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Pokud opět zvolíme $x_3 = t$, $x_5 = s$ ($t, s \in \mathbb{R}$), dostaneme odsud obecné řešení (2.1) ve stejném tvaru, a to bezprostředně. Uvažte příslušné rovnice

$$\begin{aligned} x_1 &= 1/2, \\ x_2 + t - 2s &= 1, \\ x_4 &= 3/2. \end{aligned}$$

□

2.8. Najděte řešení soustavy lineárních rovnic zadané rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right).$$

Řešení. Uvedenou rozšířenou maticí upravíme na schodovitý tvar. Nejprve první a třetí řádek opíšeme a do druhého řádku napíšeme součet (-2) násobku prvního a 3 násobku druhého řádku a do čtvrtého řádku součet 5 násobku prvního a (-3) násobku posledního řádku. Takto získáme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & -3 & 5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array} \right).$$

Opsání prvních dvou řádků a přičtení 5 násobku druhého řádku k 3 násobku třetího a jeho 2 násobku ke čtvrtému řádku dává

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 5 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 14 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

Pokud první, druhý a čtvrtý řádek opíšeme a ke třetímu přičteme čtvrtý, dostaneme

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -17 & -1 & 33 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right).$$

Dále je (řádkové úpravy jsou již „obvyklé“)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -18 & 9 & 45 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & 12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{array} \right).$$

Vidíme, že soustava má právě 1 řešení. Určeme ho zpětnou eliminací

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -10 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Výsledek je tak

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 1.$$

□

2.9. Uveďte všechna řešení homogenního systému

$$x + y = 2z + v, \quad z + 4u + v = 0, \quad -3u = 0, \quad z = -v$$

4 lineárních rovnic 5 proměnných x, y, z, u, v .

Řešení. Systém přepíšeme do matice tak, že v prvním sloupci budou koeficienty u x , ve druhém sloupci koeficienty u y , až v pátém sloupci koeficienty u v , přičemž všechny členy v každé rovnici převedeme na levou stranu. Tímto způsobem přísluší systému matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Přičteme-li $(4/3)$ násobek třetího řádku ke druhému a odečteme-li poté druhý řádek od čtvrtého, obdržíme

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále vynásobíme třetí řádek číslem $-1/3$ a přičteme 2 násobek druhého řádku k prvnímu, což dává

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z poslední matice můžeme přímo vypsát všechna řešení

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

neboť máme matici ve schodovitém tvaru, přičemž první nenulové číslo v každém řádku je 1 a ve sloupci, kde se taková 1 nachází, jsou na ostatních pozicích 0. Výše uvedené řešení ve tvaru lineární kombinace dvou vektorů je určeno právě sloupci bez prvního nenulového čísla nějakého řádku, tj. druhým a pátým sloupcem, kdy volíme 1 jako druhou složku pro druhý sloupec a jako pátou

složku pro pátý sloupec a kdy čísla v příslušném sloupci bereme s opačným znaménkem a umísťujeme je na pozici danou sloupcem, ve kterém je první 1 v jejich řádku. Dodejme, že výsledek je ihned možné přepsat do tvaru

$$(x, y, z, u, v) = (-t - s, t, -s, 0, s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

□

2.10. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ má lineární systém

$$\begin{aligned} x_1 - ax_2 - 2x_3 &= b, \\ x_1 + (1-a)x_2 &= b-3, \\ x_1 + (1-a)x_2 + ax_3 &= 2b-1 \end{aligned}$$

- (a) právě 1 řešení;
- (b) žádné řešení;
- (c) alespoň 2 řešení?

Řešení. Soustavu „tradičně“ přepíšeme do rozšířené matice a upravíme

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 1 & 1-a & 0 & b-3 \\ 1 & 1-a & a & 2b-1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & a+2 & b-1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -a & -2 & b \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & a & b+2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Dodejme, že v prvním kroku jsme první řádek odečetli od druhého a od třetího a ve druhém kroku pak druhý od třetího. Vidíme, že soustava bude mít právě jedno řešení (které lze určit zpětnou eliminací) tehdy a jenom tehdy, když $a \neq 0$. Pro $a = 0$ totiž ve třetím sloupci není první nenulové číslo nějakého řádku. Je-li $a = 0$ a $b = -2$, dostáváme nulový řádek, kdy volba $x_3 \in \mathbb{R}$ jako parametru dává nekonečně mnoho různých řešení. Pro $a = 0$ a $b \neq -2$ poslední rovnice $a = b + 2$ nemůže být splněna – soustava nemá řešení.

Poznamenejme, že pro $a = 0$, $b = -2$ jsou řešeními

$$(x_1, x_2, x_3) = (-2 + 2t, -3 - 2t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

a pro $a \neq 0$ je jediným řešením trojice

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-3a^2 - ab - 4a + 2b + 4}{a}, -\frac{2b + 3a + 4}{a}, \frac{b + 2}{a} \right).$$

□

2.11. Zjistěte počet řešení soustav

(a)

$$\begin{aligned} 12x_1 + \sqrt{5}x_2 + 11x_3 &= -9, \\ x_1 - 5x_3 &= -9, \\ x_1 + 2x_3 &= -7; \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 4; \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 12x_3 &= 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + 6x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Vektory $(1, 0, -5)$, $(1, 0, 2)$ jsou očividně lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého) a vektor $(12, \sqrt{5}, 11)$ nemůže být jejich lineární kombinací (jeho druhá složka je nenulová), a proto matice, jejímiž řádky jsou tyto tři lineárně nezávislé vektory, je invertibilní. Soustava ve variantě (a) má tedy právě jedno řešení.

U soustav ve variantách (b), (c) si stačí povšimnout, že je

$$(4, 2, -12) = -2(-2, -1, 6).$$

V případě (b) tak sečtení první rovnice s dvojnásobkem třetí dává $0 = 8 -$ soustava nemá řešení; v případě (c) je třetí rovnice násobkem první – soustava má zřejmě nekonečně mnoho řešení. \square

2.12. Najděte (libovolný) lineární systém, jehož množina řešení je právě

$$\{(t + 1, 2t, 3t, 4t); t \in \mathbb{R}\}.$$

Řešení. Takovým systémem je např.

$$2x_1 - x_2 = 2, \quad 2x_2 - x_4 = 0, \quad 4x_3 - 3x_4 = 0.$$

Těmto rovnicím totiž uvedené řešení vyhovuje pro každé $t \in \mathbb{R}$ a vektory

$$(2, -1, 0, 0), \quad (0, 2, 0, -1), \quad (0, 0, 4, -3)$$

zadávací levé strany rovnic jsou zřejmě lineárně nezávislé (množina řešení obsahuje jeden parametr). \square

2.13. Nalezněte libovolnou matici B , pro kterou je matice $C = B \cdot A$ ve schodovitém tvaru, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \\ 7 & -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Budeme-li postupně matici A násobit zleva elementárními maticemi (uvažte, jakým řádkovým úpravám toto násobení matic odpovídá)

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & E_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & E_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ E_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & E_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & E_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ E_7 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & E_8 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obdržíme

$$B = E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/12 & -5/12 & 0 \\ 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -4/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 9/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.14. Stanovte hodnotu matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poté stanovte počet řešení systému lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 4, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 5, \\ + 2x_2 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

a také všechna řešení systému

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ + 2x_2 + x_4 &= 0, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

a systému

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -4, \\ x_1 - x_2 &= 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Řešení. Neboť je

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

jsou sloupce matice A lineárně nezávislé, a tudíž se její hodnota rovná jejímu rozměru.

První z uvedených třech systémů je zadán rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

Ovšem levá strana je právě A^T s determinantem $|A^T| = |A| \neq 0$. Existuje tedy matice $(A^T)^{-1}$ a soustava má právě 1 řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (A^T)^{-1} \cdot (4, 5, 1, 3)^T.$$

Druhý ze systémů má totožnou levou stranu (určenou maticí A^T) s prvním. Protože absolutní členy na pravé straně lineárních systémů neovlivňují počet řešení a protože každý homogenní systém má nulové řešení, dostáváme jako jediné řešení druhého systému uspořádanou čtveřici

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Třetí systém má rozšířenou matici

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \end{array} \right),$$

což je matice A (pouze poslední sloupec je uveden za svislou čarou). Pokud budeme tuto matici upravovat na schodovitý tvar, musíme obdržet řádek

$$(0 \ 0 \ 0 \ | \ a), \quad \text{kde } a \neq 0.$$

Víme totiž, že sloupec na pravé straně není lineární kombinací sloupců na levé straně (hodnota matice je 4). Tento systém nemá řešení. \square

2.15. Vyřešte systém homogenních lineárních rovnic zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{6} & 0 \\ 2 & 2 & \sqrt{3} & -2 & -\sqrt{5} \\ 0 & 2 & \sqrt{5} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 3 & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešeními jsou právě všechny skalární násobky vektoru

$$(1 + \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, 1, 0).$$

\square

2.16. Určete všechna řešení systému

$$\begin{array}{rccccrcrcl} & & x_2 & & + & x_4 & = & 1, \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2, \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2, \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1. \end{array}$$

Řešení. Výsledek je

$$x_1 = 1 + t, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = t, \quad x_4 = -\frac{1}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

\square

2.17. Vyřešte

$$3x - 5y + 2u + 4z = 2,$$

$$5x + 7y - 4u - 6z = 3,$$

$$7x - 4y + u + 3z = 5.$$

Řešení. Soustava nemá řešení. □

2.18. Rozhodněte o řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,$$

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 = 8,$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4,$$

$$3x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$$

třech proměnných x_1, x_2, x_3 .

Řešení. Soustava má řešení, protože je

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

2.19. Stanovte počet řešení 2 soustav 5 lineárních rovnic

$$A^T \cdot x = (1, 2, 3, 4, 5)^T, \quad A^T \cdot x = (1, 1, 1, 1, 1)^T,$$

kde

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T \quad \text{a} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Systém lineárních rovnic

$$3x_1 \quad + \quad 2x_3 = 1,$$

$$x_1 \quad + \quad x_3 = 2,$$

$$7x_1 \quad + \quad 4x_3 = 3,$$

$$5x_1 \quad + \quad 3x_3 = 4,$$

$$x_2 = 5$$

nemá řešení, zatímco systém

$$3x_1 \quad + \quad 2x_3 = 1,$$

$$x_1 \quad + \quad x_3 = 1,$$

$$7x_1 \quad + \quad 4x_3 = 1,$$

$$5x_1 \quad + \quad 3x_3 = 1,$$

$$x_2 = 1$$

má právě 1 řešení $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2$. □

2.20. Nechť je dáno

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Najděte taková reálná čísla b_1, b_2, b_3 , aby systém lineárních rovnic $A \cdot x = b$ měl:

- (a) nekonečně mnoho řešení;
- (b) právě jedno řešení;
- (c) žádné řešení;
- (d) právě 4 řešení.

Řešení. Správné odpovědi zní:

- (a) $b_1 = b_2 + b_3$;
- (b) nelze;
- (c) $b_1 \neq b_2 + b_3$;
- (d) nelze.

□

2.21. Vyjádřete řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 0, \end{aligned}$$

ve které $a \in \mathbb{R}$ je parametr.

Řešení. Množina všech řešení je

$$\{(-10t, (a+4)t, (3a-8)t); t \in \mathbb{R}\}.$$

□

Jak popsat analyticky shodná zobrazení v rovině či prostoru jako je rotace, osová symetrie či zrcadlení, nebo projekci třírozměrného prostoru na dvojrozměrné plátno? Jak popsat zvětšení obrázku? Co mají společného? Jsou to všechno lineární zobrazení. Co to znamená? Zachovávají jistou strukturu roviny či prostoru. Jakou strukturu? Strukturu vektorového prostoru. Každý bod v rovině či prostoru je popsán dvěma či třemi souřadnicemi. Pokud zvolíme počátek souřadnic, tak má smysl mluvit o tom, že nějaký bod je dvakrát dál od počátku stejným směrem než jiný bod. Také víme, kam se dostaneme, posuneme-li se o nějaký úsek v jistém směru a pak o jiný úsek v jiném směru. Tyto vlastnosti můžeme zformalizovat, hovoříme-li o vektorech v rovině, či prostoru a o jejich násobcích, či součtech. Lineární zobrazení má pak tu vlastnost, že obraz součtu vektorů je součet obrazů sčítaných vektorů a obraz násobku vektoru je ten stejný násobek obrazu násobeného vektoru. Tyto vlastnosti právě mají zobrazení zmíněná v úvodu tohoto odstavce. Takové zobrazení je pak jednoznačně určeno tím, jak se chová na vektorech nějaké báze (to je v rovině obrazem dvou vektorů neležících na přímce, v prostoru obrazem tří vektorů neležících v rovině).

A jak tedy zapsat nějaké lineární zobrazení f na vektorovém prostoru V ? Začneme pro jednoduchost s rovinou \mathbb{R}^2 : nechť obraz bodu (vektoru) $(1, 0)$ je (a, b) a obraz bodu $(0, 1)$ je (c, d) . Tím už je jednoznačně určený obraz libovolného bodu o souřadnicích (u, v) : $f((u, v)) = f(u(1, 0) + v(0, 1)) = uf(1, 0) +$

$vf(1, 0) = (ua, ub) + (vc, vd) = (au + cv, bu + dv)$, což můžeme výhodně zapsat následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au + cv \\ bu + dv \end{pmatrix}$$

Je tedy lineární zobrazení jednoznačně dané maticí. Navíc pokud máme další lineární zobrazení g , dané maticí $\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$, tak snadno spočítáme (čtenář si jistě ze zájmu sám ověří), že jejich složení $g \circ f$ je dáno maticí $\begin{pmatrix} ae + cg & af + ch \\ be + dg & bf + dh \end{pmatrix}$.

To nás tedy ponouká k tomu, abychom násobení matic definovali tímto způsobem, tedy aby aplikace zobrazení na vektor byla dána maticovým násobením dané matice s vektorem a aby složení zobrazení bylo dáno součinem odpovídajících matic. Obdobně v prostorech vyšší dimenze. Zároveň nám to zajistí, že násobení matic bude stejně jako skládání zobrazení asociativní a stejně jako skládání zobrazení nebude komutativní.

To je tedy další z motivací, proč se zabývat vektorovými prostory a proč je s pojmem vektorového prostoru úzce spojen pojem matice. Dále si samozřejmě ukážeme celou řadu jiných využití počítání s maticemi a vektory.

2.22. Výpočet inverzní matice. Spočítejte inverzní matice k maticím

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Poté určete matici $(A^T \cdot B)^{-1}$.

Řešení. Inverzní matici nalezneme tak, že vedle sebe napíšeme matici A a matici jednotkovou. Pomocí řádkových operací pak převedeme matici A na jednotkovou. Tímto matice jednotková přejde na matici A^{-1} . Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 6 & 3 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 3 & | & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & 2 & | & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 2 & | & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & | & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 & 11 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -7 & 11 & -9 \end{pmatrix},$$

přičemž v prvním kroku jsme odečetli od prvního řádku třetí, ve druhém jsem (-5) násobek prvního přičetli ke druhému a současně jeho (-3) násobek ke třetímu, ve třetím kroku jsme odečetli od druhého řádku třetí, ve čtvrtém jsem

(-2) násobek druhého přičetli ke třetímu, v pátém kroku jsme (-5) násobek třetího řádku přičetli ke druhému a jeho 2násobek k prvnímu, v posledním kroku jsme pak zaměnili druhý a třetí řádek. Zdůrazněme výsledek

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ -7 & 11 & -9 \end{pmatrix}.$$

Upozorníme, že při určování matice A^{-1} jsme díky vhodným řádkovým úpravám nemuseli počítat se zlomky. Přestože bychom si mohli obdobně počínat při určování matice B^{-1} , budeme raději provádět více názorné (nabízející se) řádkové úpravy. Platí

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & -2/3 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right), \end{aligned}$$

tj.

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Využitím identity

$$(A^T \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot (A^T)^{-1} = B^{-1} \cdot (A^{-1})^T$$

a znalosti výše vypočítaných inverzních matic lze obdržet

$$(A^T \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -7 \\ -4 & -2 & 11 \\ 3 & 2 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -9 & 42 \\ -10 & -5 & 27 \\ 17 & 10 & -49 \end{pmatrix}.$$

□

Vlastnosti vektorového prostoru, kterých jsme si všimli u roviny či třírozměrného prostoru, ve kterém žijeme, má celá řada jiných množin. Ukažme si to na příkladech:

2.23. Vektorový prostor ano či ne? Rozhodněte o následujících množinách, jestli jsou vektorovými prostory nad tělesem reálných čísel:

- (1) Množina řešení homogenní diferencní rovnice.
- (2) Množina řešení nehomogenní diferencní rovnice.
- (3) $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} | f(1) = f(2) = c, c \in \mathbb{R}\}$

Řešení. (1) Ano. Množina řešení, tedy množina posloupností vyhovujících dané diferencní homogenní rovnici, je evidentně uzavřená vzhledem ke sčítání

i násobení reálným číslem: mějme posloupnosti $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ a $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ vyhovující stejné homogenní diferenční rovnici, tedy

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \cdots + a(1)x_1 &= 0 \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \cdots + a(1)y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \cdots + a(1)(x_1 + y_1) = 0,$$

tedy i posloupnost $(x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$, vyhovuje stejné diferenční rovnici. Rovněž tak pokud posloupnost $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ vyhovuje dané rovnici, tak i posloupnost $(kx_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $k \in \mathbb{R}$.

(2) Ne. Součet dvou řešení nehomogenní rovnice

$$\begin{aligned} a(n)x_n + a(n-1)x_{n-1} + \cdots + a(1)x_1 &= c \\ a(n)y_n + a(n-1)y_{n-1} + \cdots + a(1)y_1 &= c, \quad c \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

vyhovuje rovnici

$$a(n)(x_n + y_n) + a(n-1)(x_{n-1} + y_{n-1}) + \cdots + a(1)(x_1 + y_1) = 2c \neq c,$$

zejména pak nevyhovuje původní nehomogenní rovnici.

(3) Je to vektorový prostor právě, když $c = 0$. Vezme-li dvě funkce f a g z dané množiny, pak $(f+g)(1) = (f+g)(2) = f(1) + g(1) = 2c$. Má-li funkce $f+g$ být prvkem dané množiny, musí být $(f+g)(1) = c$, tedy $2c = c$, tedy $c = 0$. \square

2.24. Zjistěte, zda je množina

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; |x_1| = |x_2| = |x_3|\}$$

podprostorem vektorového prostoru \mathbb{R}^3 a množina

$$U_2 = \{ax^2 + c; a, c \in \mathbb{R}\}$$

podprostorem prostoru polynomů stupně nejvýše 2.

Řešení. Množina U_1 není vektorovým (pod)prostorem. Vidíme např., že je

$$(1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2) \notin U_1.$$

Množina U_2 ovšem podprostor tvoří (nabízí se přirozené ztotožnění s \mathbb{R}^2), protože

$$(a_1x^2 + c_1) + (a_2x^2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (c_1 + c_2), \quad k \cdot (ax^2 + c) = (ka)x^2 + kc$$

pro všechna čísla $a_1, c_1, a_2, c_2, a, c, k \in \mathbb{R}$. \square

2.25. Je množina $V = \{(1, x); x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\oplus : V \times V \rightarrow V, \quad (1, y) \oplus (1, z) = (1, z + y) \quad \text{pro všechna } y, z \in \mathbb{R},$$

$$\odot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad z \odot (1, y) = (1, y \cdot z) \quad \text{pro všechna } y, z \in \mathbb{R}$$

vektorovým prostorem?

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. \square

2.26. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

Řešení. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \quad a = c = 1, \quad b = c = 1.$$

\square

2.27. Nechť je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze složená z vektorů u, v, w, z . Zjistěte, zda jsou vektory

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

Řešení. Vektory jsou lineárně nezávislé. \square

2.28. Doplňte vektory $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

Řešení. Stačí připojit např. polynom x . \square

2.29. Tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je tzv. regulární (tj. její hodnost je rovna rozměru; tj. lze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržet jednotkovou matici; tj. existuje k ní matice inverzní; tj. má nenulový determinant, roven 116; tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; tj. toto zobrazení je injektivní). \square

2.30. Necht jsou dány libovolné lineárně nezávislé vektory u, v, w, z ve vektorovém prostoru V . Rozhodněte, zda jsou ve V lineárně závislé, či nezávislé, vektory

$$u - 2v, \quad 3u + w - z, \quad u - 4v + w + 2z, \quad 4v + 8w + 4z.$$

Řešení. Lze ukázat, že z lineární nezávislosti u, v, w, z plyne, že uvažované vektory jsou lineárně nezávislé právě tehdy, když jsou lineárně nezávislé vektory

$$(1, -2, 0, 0), \quad (3, 0, 1, -1), \quad (1, -4, 1, 2), \quad (0, 4, 8, 4).$$

Neboť je

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -36 \neq 0,$$

správná odpověď zní lineárně nezávislé. □

2.1p

Matrice rotací podle souřadnicových os

Napište matici zobrazení rotací o úhel φ v kladném smyslu postupně kolem os x, y, z v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Nejprve si rozmysleme, co znamená rotace v kladném smyslu kolem nějaké osy v \mathbb{R}^3 . Předně musíme mít danou osu (přímku) nějak orientovanou (tj. zadat jeden ze dvou možných směrů „kam přímka vede“, v případě souřadnicových os je to směr do kladných čísel). Díváme-li se nyní na některou z rovin kolmých na osu, ve kterých rotace působí „obyčejnou“ rotací v rovině, shora (tj. proti orientaci osy), tak smysl otáčení v rovině nám určuje smysl dané rotace v prostoru. Při rotaci libovolného bodu kolem dané osy (řekněme x), se příslušná souřadnice daného bodu nemění, v rovině dané dvěma zbylými osami pak již je rotace dána známou maticí 2×2 . Postupně tedy dostáváme následující matice: Rotace kolem osy z :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy y :

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Rotace kolem osy x :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

U matice rotace kolem osy y musíme dávat pozor na znaménko. Je totiž rotace kolem osy y v kladném smyslu, tedy taková rotace, že pokud se díváme proti směru osy y , tak se svět točí proti směru hodinových ručiček, je rotací v záporném smyslu v rovině xz (tedy osa z se otáčí směrem k x). Rozmyslete si kladný a záporný smysl rotace podél všech tří os. □

2.31. Matice rotace kolem dané osy. Napište matici zobrazení rotace v kladném smyslu o úhel 60° kolem přímky dané počátkem a vektorem $(1, 1, 0)$ v \mathbb{R}^3 .

Řešení. Dané otáčení je složením následujících tří rotací:

- rotace o 45° v záporném smyslu podle osy z (osa rotace $(1, 1, 0)$ přejde do osy x)
- rotace o 60° v kladném smyslu podle osy x .
- rotace o 45° v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde zpět na osu danou vektorem $(1, 1, 0)$).

Matice výsledné rotace tedy bude součinem matic odpovídajících těmto třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení, prvním zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Celkem tedy dostáváme pro hledanou matici A vztah:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

□

2.32. Matice obecné rotace v \mathbb{R}^3 . Uvažme libovolný jednotkový vektor (x, y, z) . Rotace v kladném smyslu o úhel φ kolem tohoto vektoru pak můžeme zapsat jako složení následujících rotací, jejichž matice již známe:

- (1) rotace R_1 v záporném smyslu kolem osy z o úhel s kosinem $x/\sqrt{x^2 + y^2} = x/\sqrt{1 - z^2}$, tedy sinem $y/\sqrt{1 - z^2}$, ve které přejde přímka se směrovým vektorem (x, y, z) na přímku se směrovým vektorem $(0, y, z)$. Matice této rotace je

$$R_1 = \begin{pmatrix} x/\sqrt{1 - z^2} & y/\sqrt{1 - z^2} & 0 \\ -y/\sqrt{1 - z^2} & x/\sqrt{1 - z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

- (2) rotace R_2 v kladném smyslu podle osy y o úhel s kosinem $\sqrt{1 - z^2}$, tedy sinem z , ve které přejde přímka se směrovým vektorem $(0, y, z)$ na přímku se směrovým vektorem $(1, 0, 0)$. Matice této rotace je

$$R_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - z^2} & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 \\ -z & 0 & \sqrt{1 - z^2} \end{pmatrix},$$

- (3) rotace R_3 v kladném smyslu kolem osy x o úhel φ s maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix},$$

- (4) rotace R_2^{-1} s maticí R_2^{-1}
 (5) rotace R_1^{-1} s maticí R_1^{-1}

matice složení těchto zobrazení, tedy hledaná matice, je dána součinem matic jednotlivých rotací v opačném pořadí:

$$R_1^{-1} \cdot R_2^{-1} \cdot R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 =$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & 1 - \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\cos \varphi x^2 & (1 - \cos \varphi)xy - (\sin \varphi)z & (1 - \cos \varphi)xz + (\sin \varphi)y \\ (1 - \cos \varphi)yx + (\sin \varphi)z & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)y^2 & (1 - \cos \varphi)yz - (\sin \varphi)x \\ (1 - \cos \varphi)zx - (\sin \varphi)y & (1 - \cos \varphi)zy + (\sin \varphi)x & \cos \varphi + (1 - \cos \varphi)z^2 \end{pmatrix}$$

2. Determinanty

2.33. Spočítejte determinant matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Začneme rozvíjet podle prvního sloupce, kde máme nejvíce (jednu) nul. Postupně dostáváme

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Podle Saarusova pravidla
 $= -2 - 2 + 6 = 2.$

□

2.34. Zjistěte, zda je matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

invertibilní.

Řešení. Matice je invertibilní (existuje k ní inverzní matice) právě tehdy, když ji lze pomocí řádkových transformací převést na jednotkovou matici. To je ekvivalentní např. s tím, že má nenulový determinant. Vyčíslení

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

tak dává, že není invertibilní.

□

2.35. Výpočtem determinantu vhodné matice rozhodněte o lineární nezávislosti vektorů $(1, 2, 3, 1)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(2, 1, -1, 3)$ a $(0, 0, 3, 2)$.

Řešení. Protože

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

uvedené vektory jsou lineárně nezávislé. \square

2.36. Nalezněte všechny hodnoty argumentu a takové, že

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = 1.$$

Pro komplexní a uveďte buď jeho algebraický nebo goniometrický tvar.

Řešení. Spočítáme determinant rozvinutím podle prvního sloupce matice:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix},$$

dále rozvíjíme podle posledního řádku:

$$D = -a \cdot a \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = -a^2(a^2 - 1)$$

Celkem dostáváme následující podmínku pro a : $a^4 - a^2 + 1 = 0$. Substitucí $t = a^2$, pak máme $t^2 - t + 1$ s kořeny $t_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)$, $t_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3) = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3)$, odkud snadno určíme čtyři možné hodnoty parametru a : $\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \sqrt{3}/2 + i/2$, $\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6) = -\sqrt{3}/2 - i/2$, $\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \sqrt{3}/2 - i/2$, $\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = -\sqrt{3}/2 + i/2$. \square

2.37. Dokažte vorec pro tzv. Vandermondův determinant, tj. determinant Vandermondovy matice:

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i),$$

kde $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ a na pravé straně rovnosti je součin všech rozdílů $a_j - a_i$, kde $j > i$.

Řešení. Ukážeme opravdu nádherný důkaz indukci, nad nímž srdce matematika zaplesá. Pro $n = 1, 2$ vztah triviálně platí. Nechť tedy platí pro determinant matice určené čísly a_1, \dots, a_k a dokážeme, že platí i pro výpočet determinantu Vandermondovy matice určenou čísly a_1, \dots, a_{k+1} . Uvažme determinant V_{k+1} jako polynom P v proměnné a_{k+1} . Z definice determinantu vyplývá, že tento polynom bude stupně k v této proměnné a navíc čísla a_1, \dots, a_k

budou jeho kořeny: nahradíme-li totiž ve Vandermondově matici V_{k+1} poslední sloupec tvořený mocninami čísla a_{k+1} libovolným z předchozích sloupců tvořeným mocninami čísla a_i , tak to vlastně odpovídá výpočtu hodnoty determinantu (jakožto polynomu v proměnné a_{k+1}) v bodě a_i . Tato je ovšem nulová, neboť determinant z matice se dvěma shodnými, tedy lineárně závislými, sloupci je nulový. To znamená, že a_i je kořenem P . Nalezli jsme tedy k kořenů polynomu stupně k , tudíž všechny jeho kořeny a P musí být tvaru $P = C(a_{k+1} - a_1)(a_{k+1} - a_2) \cdots (a_{k+1} - a_k)$, kde C je nějaká konstanta, resp. vedoucí koeficient polynomu P . Uvážíme-li však výpočet determinantu V_{k+1} pomocí rozvoje podle posledního sloupce, tak vidíme, že $C = V_k$, což už dokazuje vzorec pro V_{k+1} .

Jiné řešení. Odečtením prvního řádku od všech ostatních řádků a následným rozvojem podle prvního sloupce obdržíme

$$\begin{aligned} V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1^2 & \cdots & x_2^{n-1} - x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_1 & x_n^2 - x_1^2 & \cdots & x_n^{n-1} - x_1^{n-1} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vytkneme-li z i -tého řádku $x_{i+1} - x_1$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, dostaneme

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix}.$$

Odečtením od každého sloupce (počínaje posledním a konče druhým) x_1 -násobku předcházejícího lze docílit úpravy

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_2^{n-j-2} x_1^j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_1 & \cdots & \sum_{j=0}^{n-2} x_n^{n-j-2} x_1^j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Proto

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1) \cdots (x_n - x_1) V_{n-1}(x_2, \dots, x_n).$$

Neboť je zřejmé

$$V_2(x_{n-1}, x_n) = x_n - x_{n-1},$$

platí (uvažme matematickou indukci)

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

Všimněme si, že tento determinant je nenulový, právě když jsou čísla x_1, \dots, x_n navzájem různá.

□

2.38. Nalezněte matici adjungovanou a matici inverzní k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Adjungovaná matice je

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}^T,$$

kde A_{ij} je součin čísla $(-1)^{i+j}$ a determinantu trojrozměrné matice vzniklé z A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce. Platí

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -24, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 20, \quad A_{14} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -32,$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{24} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 28,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{34} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{41} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{42} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 16,$$

$$A_{43} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12.$$

Dosazením získáme

$$A^* = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 28 \\ 8 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & -12 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -24 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & -32 & 0 & 16 \\ 20 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matici A^{-1} určíme ze vztahu $A^{-1} = |A|^{-1} \cdot A^*$. Determinant matice A je (rozvojem podle prvního řádku) roven

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostáváme tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 5/4 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 7/4 & 0 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

□

2.39. Nechtě je

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 2 & 7 & 15 \\ 2 & 7 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -19 & \sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Lze matici A převést na matici B pomocí elementárních řádkových transformací (pak říkáme, že jsou řádkově ekvivalentní)?

Řešení. Obě matice jsou zřejmě řádkově ekvivalentní s trojrozměrnou jednotkovou maticí. Snadno se vidí, že řádková ekvivalence na množině všech matic daných rozměrů je relací ekvivalence. Matice A a B jsou tudíž řádkově ekvivalentní. □

2.40. Nechtě jsou dány podprostory U a V generované po řadě vektory

$$(1, 1, -3), (1, 2, 2) \quad \text{a} \quad (1, 1, -1), (1, 2, 1), (1, 3, 3)$$

vektorového prostoru \mathbb{R}^3 . Nalezněte průnik těchto podprostorů.

Řešení. Nejprve si uvědomme, že podprostor V má dimenzi pouze 2 (nejedná se tedy o celý prostor \mathbb{R}^3), neboť

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

a neboť libovolná dvojice z uvažovaných třech vektorů je očividně lineárně nezávislá. Stejně snadno vidíme, že také podprostor U má dimenzi 2. Současně je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

a proto vektor $(1, 1, -1)$ nemůže náležet do podprostoru U . Průnikem rovin procházejících počátkem (dvojezměrných podprostorů) v trojrozměrném prostoru musí být alespoň přímka. V našem případě je jím právě přímka (podprostory nejsou totožné). Určili jsme dimenzi průniku – je jednodimenzionální. Všimneme-li si, že

$$1 \cdot (1, 1, -3) + 2 \cdot (1, 2, 2) = (3, 5, 1) = 1 \cdot (1, 1, -1) + 2 \cdot (1, 2, 1),$$

dostáváme vyjádření hledaného průniku ve tvaru množiny všech skalárních násobků vektoru $(3, 5, 1)$ (jedná se o přímku procházející počátkem s tímto směrovým vektorem). \square

2.41. Stanovte vektorový podprostor (prostoru \mathbb{R}^4) generovaný vektory

$$u_1 = (-1, 3, -2, 1), \quad u_2 = (2, -1, -1, 2), \quad u_3 = (-4, 7, -3, 0), \quad u_4 = (1, 5, -5, 4)$$

vybráním nějaké maximální množiny lineárně nezávislých vektorů u_i (tj. vybráním báze).

Řešení. Sepíšeme vektory u_i do sloupců matice a obdrženu matici upravíme pomocí řádkových elementárních transformací. Takto získáme

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Odtud vyplývá, že lineárně nezávislé jsou právě vektory u_1, u_2, u_4 , tj. právě ty vektory odpovídající sloupcům, které obsahují první nenulové číslo nějakého řádku. Navíc odsud plyne (viz třetí sloupec)

$$2 \cdot (-1, 3, -2, 1) - (2, -1, -1, 2) = (-4, 7, -3, 0).$$

\square

2.42. Určete všechny konstanty $a \in \mathbb{R}$ takové, aby polynomy $ax^2 + x + 2$, $-2x^2 + ax + 3$ a $x^2 + 2x + a$ byly lineárně závislé (ve vektorovém prostoru polynomů jedné proměnné stupně nejvýše 3 nad reálnými čísly).

Řešení. V bázi $1, x, x^2$ jsou souřadnice zadaných vektorů (polynomů) následující: $(a, 1, 2)$, $(-2, a, 3)$, $(1, 2, a)$. Polynomy budou závislé, právě když bude mít matice, jejíž řádky jsou tvořeny souřadnicemi zadaných vektorů menší hodnot, než je počet vektorů, v tomto případě tedy hodnot dvě a menší. V případě čtvercové matice nižší hodnot než je počet řádků je ekvivalentní nulovosti determinantu dané matice. Podmínka na a tedy zní

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ -2 & a & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 0,$$

tj. a bude kořenem polynomu $a^3 - 6a - 5 = (a + 1)(a^2 - a - 5)$, tj. úloha má tři řešení $a_1 = -1$, $a_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. \square

2.43. Je dáno lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ve standardní bázi následující maticí:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Napište matici tohoto zobrazení v bázi

$$\begin{aligned} f_1 &= (1, 1, 0) \\ f_2 &= (-1, 1, 1) \\ f_3 &= (2, 0, 1). \end{aligned}$$

Řešení. Matice přechodu T od báze $f = (f_1, f_2, f_3)$ k standardní bázi, tj. bázi danou vektory $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, získáme podle Tvrzení 2.25 zapsáním souřadnic vektorů f_1, f_2, f_3 ve standardní bázi do sloupců matice přechodu T . Máme tedy

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice přechodu od standardní báze k bázi f je potom T^{-1} , což je

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Matice zobrazení v bázi f je potom

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 2 & -\frac{3}{4} \\ \frac{5}{4} & 0 & \frac{7}{4} \\ \frac{3}{4} & -2 & \frac{9}{4} \end{pmatrix}.$$

□

2.44. Určete, jaké lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadává matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & -\frac{8}{3} \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení. Dvojnásobná vlastní hodnota -1 , příslušné vlastní vektory $[2, 0, 1]$, $[1, 1, 0]$, jednonásobná vlastní hodnota 0 , vlastní vektor $[1, 4, -3]$. Osová souměrnost podle přímky dané posledním vektorem složená s projekcí na rovinu kolmou k poslednímu vektoru, tedy danou obecnou rovnicí $x + 4y - 3z = 0$.

□

2.45. Uvažme vektorový prostor mnohočlenů jedné neznámé stupně nejvýše 2 s reálnými koeficienty. V tomto prostoru uvažme bázi $1, x, x^2$. Napište matici zobrazení derivace v této bázi a také v bázi $1 + x^2, x, x + x^2$.

Řešení. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

□

2.46. Ve standardní bázi v \mathbb{R}^3 určete matici rotace o 90° v kladném smyslu kolem přímky (t, t, t) , $t \in \mathbb{R}$, orientované ve směru vektoru $(1, 1, 1)$. Dále určete matici této rotace v bázi $\underline{g} = ((1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 1))$.

Řešení. Snadno určíme matici uvažované rotace a to ve vhodné bázi, totiž v bázi dané směrovým vektorem přímky a dále dvěma navzájem kolmými vektory v rovině $x + y + z = 0$, tedy v rovině vektorů kolmých k vektoru $(1, 1, 1)$. Uvědomme si, že matice rotace v kladném smyslu o 90° v nějaké ortonormální bázi v \mathbb{R}^2 je $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, v ortogonální s velikostmi vektorů k, l potom $\begin{pmatrix} 0 & -k/l \\ l/k & 0 \end{pmatrix}$. Zvolíme-li v rovině $x + y + z = 0$ kolmé vektory $(1, -1, 0)$ a $(1, 1, -2)$ o velikostech $\sqrt{2}$ a $\sqrt{6}$, tak v bázi $\underline{f} = ((1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 1, -2))$ má uvažovaná

rotace matici $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$. Abychom získali matici uvažované rotace ve

standardní bázi, stačí nám transformovat matici již známým způsobem. Matici přechodu T od báze \underline{f} ke standardní dostaneme zapsáním souřadnic (ve

standardní bázi) vektorů báze \underline{f} do sloupců matice T : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Celkem tedy pro hledanou matici R máme

$$\begin{aligned} R &= T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 \\ 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 & 1/3 - \sqrt{3}/3 \\ 1/3 - \sqrt{3}/3 & 1/3 + \sqrt{3}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tento výsledek můžeme ověřit dosazením do matice obecné rotace (2.32), normováním vektoru $(1, 1, 1)$ dostáváme vektor $(x, y, z) = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$, $\cos(\varphi) = 0$, $\sin(\varphi) = 1$. \square

2.47. Matice obecné rotace podruhé. Zkusme odvodit matici (obecné) rotace (2.32) o úhel φ v kladném smyslu kolem jednotkového vektoru (x, y, z) jiným způsobem než jsme učinili v [], analogicky jako v předchozím příkladě. V bázi $\underline{f} = ((x, y, z), (-y, x, 0), (zx, zy, z^2 - 1))$, tedy v ortogonální bázi tvořené směrovým vektorem osy rotace a dvěma navzájem kolmými vektory o shodných velikostech $\sqrt{1 - z^2}$ ležícími v rovině kolmé na osu, má uvažovaná rotace

matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}$. Matici přechodu od báze (\underline{f}) ke

standardní bázi je potom $T = \begin{pmatrix} x & -y & zx \\ y & x & zy \\ z & 0 & z^2 - 1 \end{pmatrix}$ *sinverznematic* $T^{-1} =$

2.48. Označme S střed hrany AB krychle $ABCDEFGH$ (v obvyklém označení, s hranou AE). Určete kosinus odchylky úseček ES a BG .

Řešení. Vzhledem k tomu, že homotetie (stejnolehlost) je podobným zobrazením, tj. zachovává úhly, můžeme předpokládat, že krychle má hranu velikosti 1. Umístíme-li navíc bod A do počátku souřadné soustavy a body B , resp. E do bodů o souřadnicích $[1, 0, 0]$, resp. $[0, 0, 1]$, pak mají zbylé uvažované body následující souřadnice: $S = [1/2, 0, 0]$, $G = [1, 1, 1]$, tedy vektor $ES = (1/2, 0, -1)$ a $BG = (0, 1, 1)$. Pro hledaný cosinus odchylky φ tedy máme

$$\cos(\varphi) = \left| \frac{(1/2, 0, -1) \cdot (0, 1, 1)}{\|(1/2, 0, -1)\| \|(0, 1, 1)\|} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

□

3. Vektorové prostory a lineární zobrazení

Podrobnějším rozбором vlastností různých typů lineárních zobrazení se nyní dostaneme k pořádnějšímu pochopení nástrojů, které nám vektorové prostory pro lineární modelování procesů a systémů nabízejí.

2.29

Začneme několika příklady v prostorech malých dimenzí. Ve standardní bázi \mathbb{R}^2 uvažujme následující matice zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice A zadává kolmou projekci podél podprostoru

$$W \subset \{(0, a); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

na podprostor

$$V \subset \{(a, 0); a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Evidentně pro toto zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí $f \circ f = f$ a tedy $f|_{\text{Im } f}$ je identické zobrazení. Jádrem f je právě podprostor W .

Matice B má vlastnost $B^2 = 0$, platí tedy totéž o příslušném zobrazení f . Můžeme si jej představit jako matici derivování polynomů $\mathbb{R}_1[x]$ stupně nejvýše jedna v bázi $(1, x)$.

Matice C zadává zobrazení f , které první vektor báze zvětší a -krát, druhý b -krát. Tady se nám tedy celá rovina rozpadá na dva podprostory, které jsou zobrazením f zachovány a ve kterých jde o pouhou *homotetii*, tj. roztahení skalárním násobkem. Např. volba $a = 1$, $b = -1$ odpovídá komplexní konjugaci $x + iy \mapsto x - iy$ na dvourozměrném reálném prostoru $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ v bázi $(1, i)$. Toto je lineární zobrazení reálného vektorového prostoru, nikoliv však jednorozměrného komplexního prostoru \mathbb{C} . V geometrii roviny jde o zrcadlení podle osy x .

Matice D je maticí rotace o pravý úhel ve standardní bázi. Jako pro každé lineární zobrazení, které je bijekcí, umíme najít báze na definičním oboru a oboru hodnot, ve kterých bude jeho maticí jednotková matice E (prostě vezmeme jakoukoliv bázi na definičním oboru a její obraz na oboru hodnot). Neumíme ale v tomto případě totéž s jednou bází na začátku i konci. Zkusme však uvažovat matici C jako matici zobrazení $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$. Pak umíme najít vektory $u = (i, 1)$, $v = (1, i)$, pro které bude platit

$$g(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = i \cdot u, \quad g(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = -i \cdot v.$$

To ale znamená, že v bázi (u, v) na \mathbb{C}^2 má g matici

$$K = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

a povšimněme si, že tato komplexní analogie k případu matice C má na diagonále prvky $\pm a$, $a = \cos(\frac{1}{2}\pi) + i \sin(\frac{1}{2}\pi)$. Jinými slovy, argument v goniometrickém tvaru tohoto komplexního čísla udává úhel otočení. Navíc, můžeme si označit reálnou a imaginární část vektoru u takto

$$u = x_u + iy_u = \operatorname{Re} u + i \operatorname{Im} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a zúžení komplexního zobrazení g na reálný vektorový podprostor generovaný vektory x_u a iy_u (tj. násobení komplexní jednotkou i) je právě otočení o úhel $\frac{1}{2}\pi$.

2.49. Určete součet úhlů, které v rovině \mathbb{R}^2 svírají s osou x postupně vektory $(1, 1)$, $(2, 1)$ a $(3, 1)$ (obrázek).

Řešení. Uvážíme-li rovinu \mathbb{R}^2 jakožto Gaussovu rovinu komplexních čísel, tak uvedené vektory odpovídají komplexním číslům $1+i$, $2+i$ a $3+i$ a máme najít součet jejich argumentů, tedy podle Moivroy věty argument jejich součinu. Jejich součin je $(1+i)(2+i)(3+i) = (1+3i)(3+i) = 10i$, tedy ryze imaginární číslo s argumentem $\pi/2$ a tedy hledaný součet je roven právě $\pi/2$. \square

2.50. Uvažme komplexní čísla jako reálný vektorový prostor a za jeho bázi zvolme 1 a i . V této bázi určete matici následujících lineárních zobrazení:

- konjugace,
- násobení číslem $(2+i)$. Určete matici těchto zobrazení v bázi $(1-i)$, $(1+i)$.

Řešení.

- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,
- V obou bazích je matice stejná a to $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Vysvětlení viz příklad ??.

\square

2.51. Nalezněte matici rotace v kladném smyslu o úhel $\pi/3$ kolem přímky procházející počátkem s orientovaným směrovým vektorem $(1, 1, 0)$ ve standardní bázi \mathbb{R}^3 .

Řešení. Uvedené otočení lze získat složením po řadě těchto tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu x);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy x ;
- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa x přejde na osu rotace).

Matice výsledné rotace bude součinem matic odpovídajících uvedeným třem zobrazením, přičemž pořadí matic je dáno pořadím provádění jednotlivých zobrazení – prvním zobrazení odpovídá v součinu matice nejvíce napravo. Takto dostaneme hledanou matici

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Uvědomme si, že výslednou rotaci bylo možné získat např. také složením následujících tří zobrazení:

- rotace o $\pi/4$ v kladném smyslu podle osy z (osa rotace přejde na osu y);
- rotace o $\pi/3$ v kladném smyslu podle osy y ;
- rotace o $\pi/4$ v záporném smyslu podle osy z (osa y přejde na osu rotace).

Analogicky tak dostáváme

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.52. Určete matici A , která ve standardní bázi prostoru \mathbb{R}^3 zadává kolmou projekci do vektorového podprostoru generovaného vektory $u_1 = (-1, 1, 0)$ a $u_2 = (-1, 0, 1)$.

Řešení. Nejprve poznamenejme, že uvedený podprostor je rovinou procházející počátkem s normálovým vektorem $u_3 = (1, 1, 1)$. Uspořádaná trojice $(1, 1, 1)$ je totiž očividným řešením soustavy

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0, \\ -x_1 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

tj. vektor u_3 je kolmý na vektory u_1, u_2 . Podotkněme rovněž, že jsme tento příklad již vyřešili (matici A známe z dřívějšího příkladu).

Při dané projekci se vektory u_1 a u_2 musejí zobrazit na sebe a vektor u_3 potom na nulový vektor. V bázi složené po řadě z vektorů u_1, u_2, u_3 je proto matice této projekce

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pomocí matic přechodu

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

od báze (u_1, u_2, u_3) ke standardní bázi a od standardní báze k bázi (u_1, u_2, u_3) získáme

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

□

2.30

2.53. Vlastní čísla a vlastní vektory zobrazení. Klíčem k popisu zobrazení v předchozích příkladech byly odpovědi na otázku „jaké jsou vektory splňující rovnici $f(u) = a \cdot u$ “ pro nějaké skaláry a . Zvolme tedy pevně lineární zobrazení $f : V \rightarrow V$ na vektorovém prostoru dimenze n nad skaláry \mathbb{K} . Jestliže si představíme takovou rovnost zapsanou v souřadnicích, tj. s využitím matice zobrazení A v nějakých bazích, jde o výraz

$$A \cdot x - a \cdot x = (A - a \cdot E) \cdot x = 0.$$

Z předchozího víme, že taková soustava rovnic má jediné řešení $x = 0$, pokud je matice $A - aE$ invertibilní. My tedy chceme najít takové hodnoty $a \in \mathbb{K}$, pro které naopak $A - aE$ invertibilní není, a nutnou a dostatečnou podmínkou je (viz Věta ??)

e2.1

$$(2.2) \quad \det(A - a \cdot E) = 0.$$

Jestliže považujeme $\lambda = a$ za proměnnou v předchozí skalární rovnici, hledáme ve skutečnosti kořeny polynomu stupně n . Jak jsme viděli v případě matice D výše, kořeny mohou, ale nemusí existovat podle volby pole skalárů \mathbb{K} .

Skaláry vyhovující rovnici $f(u) = a \cdot u$ pro nenulový vektor $u \in V$ nazýváme *vlastní čísla zobrazení f* , příslušné vektory u pak *vlastní vektory zobrazení f* .

Z definice vlastních čísel je zřejmé, že jejich výpočet nemůže záviset na volbě báze a tedy matice zobrazení f . Skutečně, jako přímý důsledek transformačních vlastností z ?? a Cauchyovy věty ?? pro výpočet determinantu součinu dostáváme jinou volbou souřadnic matici $A' = P^{-1}AP$ s invertibilní maticí P a

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda EP| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P^{-1}| |(A - \lambda E)| |P|,$$

protože násobení skalárů je komutativní a $|P^{-1}| = |P|^{-1}$.

Obdobnou terminologii používáme i pro matice. Pro matici A dimenze n nad \mathbb{K} nazýváme polynom $|A - \lambda E| \in \mathbb{K}_n[\lambda]$ *charakteristický polynom matice A* . Kořeny tohoto polynomu jsou *vlastní hodnoty matice A* . Je-li A matice zobrazení $f : V \rightarrow V$ v jisté bázi, pak $|A - \lambda E|$ nazýváme také *charakteristický polynom zobrazení f* .

Protože je charakteristický polynom zobrazení $f : V \rightarrow V$ nezávislý na volbě báze V , $\dim V = n$, jsou i jeho koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné λ skaláry vyjadřující vlastnosti zobrazení f , tj. nemohou záviset na naší volbě báze. Zejména je snadné vyjádřit koeficienty u nejvyšších a nejnižších mocnin:

$$|A - \lambda \cdot E| = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \dots + |A| \cdot \lambda^0$$

Součet diagonálních členů matice se nazývá *stopa matice*, značíme ji $\text{Tr}A$, *stopa zobrazení* je definována jako stopa jeho matice v libovolné bázi.

2.31

(1) Uvažme zobrazení s maticí ve standardní bázi

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak dostáváme

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1,$$

s kořeny $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1$. Vlastní vektory s vlastní hodnotou $\lambda = 1$ se spočtou:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

s bázi prostoru řešení, tj. všech vlastních vektorů s touto vlastní hodnotou

$$u_1 = (0, 1, 0), \quad u_2 = (1, 0, 1).$$

Podobně pro $\lambda = -1$ dostáváme třetí nezávislý vlastní vektor

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow u_3 = (-1, 0, 1).$$

V bázi u_1, u_2, u_3 (všimněte si, že u_3 musí být lineárně nezávislý na zbylých dvou díky předchozí větě a u_1, u_2 vyšly jako dvě nezávislá řešení) má f diagonální matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Celý prostor \mathbb{R}^3 je přímým součtem vlastních podprostorů, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = 2$, $\dim V_2 = 1$. Tento rozklad je dán jednoznačně a vypovídá mnoho o geometrických vlastnostech zobrazení f . Vlastní podprostor V_1 je navíc přímým součtem jednorozměrných vlastních podprostorů, které lze však zvolit mnoha různými způsoby (takový další rozklad nemá tedy již žádný geometrický význam).

(2) Uvažme lineární zobrazení $f : \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}_2[x]$ definované derivováním polynomů, tj. $f(1) = 0$, $f(x) = 1$, $f(x^2) = 2x$. Zobrazení f má tedy v obvyklé bázi $(1, x, x^2)$ matici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $|A - \lambda \cdot E| = -\lambda^3$, existuje tedy pouze jediná vlastní hodnota, $\lambda = 0$. Spočtíme vlastní vektory:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prostor vlastních vektorů je tedy jednorozměrný, generovaný konstantním polynomem 1.

2.54. Příklad včetně změny báze. Uvažujme lineární zobrazení $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dané ve standardní bázi maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Určete toto zobrazení a napište jeho matici v bázi:

$$\begin{aligned} e_1 &= [1, -1, 1] \\ e_2 &= [1, 2, 0] \\ e_3 &= [0, 1, 1] \end{aligned}$$

Řešení. Spočítejme nejprve vlastní čísla jim příslušné vlastní vektory: charakteristický polynom dané matice je

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 2).$$

Kořeny tohoto polynomu, vlastní čísla, udávají, kdy nebude mít matice

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

plnou hodnotu, tedy soustava rovnic

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

bude mít i jiné řešení než řešení $= (0, 0, 0)$. Vlastní čísla tedy jsou $0, 2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$. Spočítejme vlastní vektory příslušné jednotlivým vlastním hodnotám:

- 0 : Řešíme tedy soustavu

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Její řešení je jednodimenzionální vektorový prostor vlastních vektorů $\langle (1, -1, 1) \rangle$.

- $2 + \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} -(1 + \sqrt{2}) & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & -(1 + \sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je jednodimenzionální prostor $\langle (1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}) \rangle$.

- $2 - \sqrt{2}$: Řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix} (\sqrt{2} - 1) & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 2 & (\sqrt{2} - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Řešením je prostor vlastních vektorů $\langle (1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}) \rangle$.

Zobrazení tedy můžeme interpretovat jako projekci podél vektoru $(1, -1, 1)$ do roviny dané vektory $(1, 1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ a $(1, 1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ složenou s lineárním zobrazením daným natažením daným vlastním čísly ve směru uvedených vlastních vektorů.

Nyní jej vyjádříme v uvedené bázi. K tomu budeme potřebovat matici přechodu T od standardní báze k dané nové bázi. Tu získáme tak, že souřadnice vektorů staré báze v bázi nové napíšeme do sloupců matice T . My však snadněji napíšeme matici přechodu od příklané báze k bázi standardní, tedy matici T^{-1} . Souřadnice vektorů nové báze pouze napíšeme do sloupců:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pro matici B zobrazení v nové bázi pak máme (viz ??).

$$B = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

□

2.55. Další příklady. Naleznete vlastní čísla a jim příslušné (prostory) vlastních vektorů matice:

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Řešení. Trojnásobná vlastní hodnota -1, příslušný vektorový prostor je $\langle (1, 0, 0), (0, 2, 1) \rangle$.

□

2.56. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu získejte ortogonální bázi podprostoru

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

prostoru \mathbb{R}^4 .

Řešení. Množina řešení uvedené homogenní lineární rovnice je zřejmě vektorovým prostorem s bázi

$$u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektory ortogonální báze získané užitím Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu budeme značit v_1, v_2, v_3 . Nejprve položíme $v_1 = u_1$. Dále

$$v_2 = u_2 - \frac{u_2^T \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 = u_2 - \frac{1}{2} v_1 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)^T,$$

resp. zvolme násobek $v_2 = (-1, -1, 2, 0)^T$. Následně je

$$v_3 = u_3 - \frac{u_3^T \cdot v_1}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{u_3^T \cdot v_2}{\|v_2\|^2} v_2 = u_3 - \frac{1}{2} v_1 - \frac{1}{6} v_2 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)^T.$$

Máme tedy celkem

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dodejme, že pro jednoduchost příkladu lze bezprostředně uvést ortogonální bázi z vektorů

$$(1, -1, 0, 0)^T, \quad (0, 0, 1, -1)^T, \quad (1, 1, -1, -1)^T$$

nebo

$$(-1, 1, 1, -1)^T, \quad (1, -1, 1, -1)^T, \quad (-1, -1, 1, 1)^T.$$

□

2.57. Napište matici zobrazení kolmé projekce do roviny procházející počátkem a kolmé na vektor $(1, 1, 1)$.

Řešení. Obraz libovolného bodu (vektoru) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ v uvažovaném zobrazení získáme tak, že od daného bodu odečteme jeho kolmou projekci do normálového směru dané roviny, tedy do směru $(1, 1, 1)$. Tato projekce \mathbf{p} je dána (viz přednáška) jako

$$\frac{(\mathbf{x}, (1, 1, 1))}{|(1, 1, 1)|^2} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right).$$

Výsledné zobrazení je tedy

$$\mathbf{x} - \mathbf{p} = \left(\frac{2x_1}{3} - \frac{x_2 + x_3}{3}, \frac{2x_2}{3} - \frac{x_1 + x_3}{3}, \frac{2x_3}{3} - \frac{x_1 + x_2}{3} \right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Srovnej s (??).

□

2.58. Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány třídimenziální (trojrozměrné) podprostory

$$U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle, \quad V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle,$$

přičemž

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Určete dimenzi a libovolnou bázi podprostoru $U \cap V$.

Řešení. Do podprostoru $U \cap V$ náleží právě ty vektory, které je možné obdržet jako lineární kombinaci vektorů u_i a také jako lineární kombinaci vektorů v_i . Hledáme tedy čísla $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ taková, aby platilo

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tj. hledáme řešení soustavy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= y_1 + y_2 + y_3, \\ x_1 + x_2 &= y_1 - y_2 - y_3, \\ x_1 + x_3 &= -y_1 + y_2 - y_3, \\ x_2 + x_3 &= -y_1 - y_2 + y_3. \end{aligned}$$

Při maticovém zápisu této homogenní soustavy (a při zachování pořadí proměnných) je

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak řešení

$$x_1 = -2t, \quad x_2 = -2s, \quad x_3 = 2s + 2t, \quad y_1 = -s - t, \quad y_2 = s, \quad y_3 = t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Odtud dosazením získáváme obecný vektor průniku

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2t - 2s \\ 2s \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Vidíme, že

$$\dim U \cap V = 2, \quad U \cap V = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

□

2.59. Uveďte nějakou bázi podprostoru

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

vektorového prostoru reálných matic 3×2 . Tuto bázi doplňte na bázi celého prostoru.

Řešení. Připomeňme, že bázi podprostoru tvoří množina lineárně nezávislých vektorů, které generují uvažovaný podprostor. Protože

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

celý podprostor U je generován pouze prvními dvěma maticemi. Ty jsou potom lineárně nezávislé (jedna není násobkem druhé), a tak zadávají bázi. Chceme-li ji doplnit na bázi celého prostoru reálných matic 3×2 , musíme najít další čtyři matice (dimenze celého prostoru je zjevně 6) takové, aby výsledná šestice byla lineárně nezávislá. Můžeme využít toho, že známe např. standardní bázi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prostoru reálných matic 3×2 , který lze přímo ztotožnit s \mathbb{R}^6 . Sepíšeme-li dva vektory báze U a vektory standardní báze celého prostoru v tomto pořadí, výběrem prvních 6 lineárně nezávislých vektorů dostaneme hledanou bázi. Pokud však uvážíme, že kupř.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

můžeme ihned bázového vektory

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

podprostoru U doplnit maticemi (vektory prostoru matic)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na bázi. Upozorníme, že výše uvedený determinant lze vyčíslit velmi snadno – je roven součinu prvků na diagonále, neboť matice je v dolním trojúhelníkovém tvaru (nad diagonálou jsou všechny prvky nulové). \square

2.60. Napište nějakou bázi reálného vektorového prostoru matic 3×3 nad \mathbb{R} s nulovou stopou (součet prvků na diagonále) a napište souřadnice matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

v této bázi.

2.61. Zaveďte nějaký skalární součin na vektorovém prostoru matic z předchozího příkladu. Spočítejte normu matice z předchozího příkladu, která je indukovaná Vámi zavedeným součinem.

2.62. Určete nějakou bázi vektorového prostoru antisymetrických reálných čtvercových matic typu 4×4 . Uvažte standardní skalární součin v této bázi a pomocí tohoto součinu vyjádřete velikost matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.63. Najděte ortogonální doplněk U^\perp podprostoru

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4); x_1 = x_3, x_2 = x_3 + 6x_4\} \subset \mathbb{R}^4.$$

Řešení. Ortogonální doplněk U^\perp tvoří právě ty vektory, které jsou kolmé na každé řešení soustavy

$$\begin{array}{rcl} x_1 & - & x_3 & = & 0, \\ x_2 & - & x_3 & - & 6x_4 & = & 0. \end{array}$$

Vektor je ovšem řešením této soustavy tehdy a jenom tehdy, když je kolmý na oba vektory $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, -1, -6)$. Je tedy

$$U^\perp = \{a \cdot (1, 0, -1, 0) + b \cdot (0, 1, -1, -6); a, b \in \mathbb{R}\}.$$

□

2.64. Určete, zda jsou podprostory

$$U = \langle (2, 1, 2, 2) \rangle, \quad V = \langle (-1, 0, -1, 2), (-1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle$$

prostoru \mathbb{R}^4 na sebe kolmé. Pokud ano, je $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$, tj. je $U^\perp = V$?

Řešení. Vektor, který zadává podprostor U , je kolmý na každý ze tří vektorů, které generují V . Podprostory jsou tak na sebe kolmé. Avšak není pravda, že $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. Podprostor V je totiž pouze dvojdimensionální, protože

$$(-1, 0, -1, 2) = (-1, 0, 1, 0) - 2(0, 0, 1, -1).$$

□

2.65. V závislosti na parametru $t \in \mathbb{R}$ stanovte dimenzi podprostoru U vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li U generován vektory

$$\begin{array}{l} \text{(a) } u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, t, 1), \quad u_3 = (2, 2, t); \\ \text{(b) } u_1 = (t, t, t), \quad u_2 = (-4t, -4t, 4t), \quad u_3 = (-2, -2, -2). \end{array}$$

Řešení. V prvním případě je $\dim U = 2$ pro $t \in \{1, 2\}$, jinak je $\dim U = 3$. Ve druhém případě je $\dim U = 2$ pro $t \neq 0$ a $\dim U = 1$ pro $t = 0$. □

2.66. Sestrojte ortogonální bázi podprostoru

$$\langle (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -1), (-1, 1, 1, 1) \rangle$$

prostoru \mathbb{R}^4 .

Řešení. Gram-Schmidtovým ortogonalizačním procesem lze obdržet výsledek

$$((1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, -3), (-2, 1, 1, 0)).$$

□

2.67. V prostoru \mathbb{R}^4 nalezněte nějakou ortogonální bázi podprostoru všech lineárních kombinací vektorů $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, -7)$, $(4, -2, 4, 14)$ a podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

Řešení. Při zachování pořadí podprostorů ze zadání jsou ortogonálními bázemi např.

$$((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, -7))$$

a

$$((1, 2, 2, -1), (2, 3, -3, 2), (2, -1, -1, -2)).$$

□

2.68. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b \in \mathbb{R}$ jsou vektory

$$(1, 1, 2, 0, 0), \quad (1, -1, 0, 1, a), \quad (1, b, 2, 3, -2)$$

v prostoru \mathbb{R}^5 po dvou ortogonální?

Řešení. Výsledek je $a = 9/2$, $b = -5$, neboť musí mj. platit

$$1 + b + 4 + 0 + 0 = 0, \quad 1 - b + 0 + 3 - 2a = 0.$$

□

2.69. V prostoru \mathbb{R}^5 uvažujte podprostor generovaný vektory

$$(1, 1, -1, -1, 0), \quad (1, -1, -1, 0, -1), \quad (1, 1, 0, 1, 1), \quad (-1, 0, -1, 1, 1).$$

Najděte nějakou bázi jeho ortogonálního doplňku.

Řešení. Hledaná báze obsahuje jediný vektor. Je jím nějaký nenulový skalární násobek vektoru

$$(3, -7, 1, -5, 9).$$

□

2.70. Popište ortogonální doplněk podprostoru V prostoru \mathbb{R}^4 , je-li V generován vektory $(-1, 2, 0, 1)$, $(3, 1, -2, 4)$, $(-4, 1, 2, -4)$, $(2, 3, -2, 5)$.

Řešení. Ortogonální doplněk (komplement) V^\perp je množina všech skalárních násobků vektoru $(4, 2, 7, 0)$. □

2.71. V prostoru \mathbb{R}^5 určete ortogonální doplněk W^\perp podprostoru W , jestliže

- (a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t); r, s, t \in \mathbb{R}\}$;
- (b) W je množina řešení soustavy rovnic $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0$.

Řešení. Platí

- (a) $W^\perp = \langle (1, 0, -1, 1, 0), (1, 3, 2, 1, -3) \rangle$;
- (b) $W^\perp = \langle (1, 0, -1, 0, 0), (1, -1, 1, -1, 1) \rangle$.

□

2.72. Nechtě jsou v prostoru \mathbb{R}^4 dány vektory

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1).$$

Doplňte tyto dva vektory libovolným způsobem na ortogonální bázi celého \mathbb{R}^4 . (Můžete k tomu využít Gram-Schmidtův ortogonalizační proces.)

Řešení. Hledaných doplnění je pochopitelně nekonečně mnoho. Jedním (skutečně jednoduchým) je např.

$$(1, -2, 2, 1), \quad (1, 3, 2, 1), \quad (1, 0, 0, -1), \quad (1, 0, -1, 1).$$

□

2.73. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem nalezněte nějakou ortonormální bázi podprostoru $V \subset \mathbb{R}^4$, kde $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

2.74. Je množina $V = \{(1, x); x \in \mathbb{R}\}$ s operacemi

$$\begin{aligned} \oplus : V \times V &\rightarrow V, & (1, y) \oplus (1, z) &= (1, z + y) \quad \text{pro všechna } y, z \in \mathbb{R}, \\ \odot : \mathbb{R} \times V &\rightarrow V, & z \odot (1, y) &= (1, y \cdot z) \quad \text{pro všechna } y, z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

vektorovým prostorem?

Řešení. Lehce se ověří, že se jedná o vektorový prostor. První souřadnice neovlivňuje výpočty součtů vektorů ani hodnoty skalárních násobků vektorů: jedná se o přeznačený prostor $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. □

2.75. Pro jaké hodnoty parametrů $a, b, c \in \mathbb{R}$ jsou vektory $(1, 1, a, 1)$, $(1, b, 1, 1)$, $(c, 1, 1, 1)$ lineárně závislé?

Řešení. Vektory jsou závislé, je-li splněna alespoň jedna z podmínek

$$a = b = 1, \quad a = c = 1, \quad b = c = 1.$$

□

2.76. Nechtě je dán vektorový prostor V a nějaká jeho báze složená z vektorů u, v, w, z . Zjistěte, zda jsou vektory

$$u - 3v + z, \quad v - 5w - z, \quad 3w - 7z, \quad u - w + z$$

lineárně (ne)závislé.

Řešení. Vektory jsou lineárně nezávislé. □

2.77. Doplňte vektory $1 - x^2 + x^3$, $1 + x^2 + x^3$, $1 - x - x^3$ na bázi prostoru polynomů stupně nejvýše 3.

Řešení. Stačí připojit např. polynom x . □

2.78. Tvoří matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bázi vektorového prostoru čtvercových dvourozměrných matic?

Řešení. Uvedené čtyři matice jsou jako vektory v prostoru 2×2 matic lineárně nezávislé. Vyplývá to z toho, že matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

je tzv. regulární (tj. její hodnost je rovna rozměru; tj. lze z ní pomocí řádkových elementárních transformací obdržet jednotkovou matici; tj. existuje k ní matice inverzní; tj. má nenulový determinant, roven 116; tj. jí zadaná homogenní soustava lineárních rovnic má pouze nulové řešení; tj. každý nehomogenní lineární systém s levou stranou určenou touto maticí má právě jedno řešení; tj. obor hodnot lineárního zobrazení, jež zadává, je vektorový prostor dimenze 4; tj. toto zobrazení je injektivní). \square

2.79. Vyřešte maticové rovnice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Zjevně neznámé X_1 a X_2 musejí být matice 2×2 (aby uvažované součiny matic existovaly a výsledkem byla matice 2×2). Položme

$$X_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$$

a roznásobme matice v první zadané rovnici. Má platit

$$\begin{pmatrix} a_1 + 3c_1 & b_1 + 3d_1 \\ 3a_1 + 8c_1 & 3b_1 + 8d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

tj. má být

$$\begin{array}{rclcl} a_1 & + & 3c_1 & & = & 1, \\ & & b_1 & + & 3d_1 & = & 2, \\ 3a_1 & + & 8c_1 & & & = & 3, \\ & & 3b_1 & + & 8d_1 & = & 4. \end{array}$$

Sečtením (-3) násobku první rovnice se třetí dostáváme $c_1 = 0$ a následně $a_1 = 1$. Podobně sečtením (-3) násobku druhé rovnice se čtvrtou dostáváme $d_1 = 2$ a poté $b_1 = -4$. Je tedy

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnoty a_2, b_2, c_2, d_2 najdeme odlišným způsobem. Např. použitím vzorce

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

který platí pro libovolná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (inverzní matice existuje právě tehdy, když $ad - bc \neq 0$), spočtěme

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobení zadané rovnice touto maticí zprava dává

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

a tudíž

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

□

4. Cvičení

2.80. V závislosti na hodnotě parametru $a \in \mathbb{R}$ rozhodněte o počtu řešení soustavy lineárních rovnic, která je zadaná maticí přidružené homogenní soustavy

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 & a \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravé strany

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Pro $a = 0$ nemá uvažovaný systém řešení; pro $a \neq 0$ má nekonečně mnoho řešení. □

2.81. Rozhodněte, zda existuje homogenní soustava lineárních rovnic tří proměnných, jejíž množinou řešení je

- (a) $\{(0, 0, 0)\}$;
- (b) $\{(0, 1, 0), (0, 0, 0), (1, 1, 0)\}$;
- (c) $\{(x, 1, 0); x \in \mathbb{R}\}$;
- (d) $\{(x, y, 2y); x, y \in \mathbb{R}\}$.

Řešení. Při zachování pořadí jsou správné odpovědi „ano“, „ne“, „ne“ a „ano“. □

2.82. Vektory

$$(1, 2, 1), \quad (-1, 1, 0), \quad (0, 1, 1)$$

jsou lineárně nezávislé, a proto z nich lze sestavit bázi \mathbb{R}^3 . Každý trojrozměrný vektor je tak nějakou jejich lineární kombinací. Jakou jejich lineární kombinací je vektor $(1, 1, 1)$?

Řešení. Výsledek je

$$(1, 1, 1) = \frac{1}{2} \cdot (1, 2, 1) - \frac{1}{2} \cdot (-1, 1, 0) + \frac{1}{2} \cdot (0, 1, 1).$$

□

2.83. Vyjádřete vektor $(5, 1, 11)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 2, 2)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 1, 3)$, tj. nalezněte čísla $p, q, r \in \mathbb{R}$, pro která je

$$(5, 1, 11) = p(3, 2, 2) + q(2, 3, 1) + r(1, 1, 3).$$

Řešení. Úloha má jediné řešení

$$p = 2, \quad q = -2, \quad r = 3.$$

□

2.84. Řešte maticovou rovnici

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Taková matice X existuje právě jedna, a to

$$\begin{pmatrix} 18 & -32 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

□

2.85. Vypočítejte inverzní matici k matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Platí

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -4 \\ 1 & 12 & -5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

2.86. Nalezněte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Inverzní maticí je

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

2.87. Zjistěte, zda existuje inverzní matice k matici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud ano, určete tuto matici C^{-1} .

Řešení. Je

$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

2.88. Stanovte A^{-1} , je-li

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$, přičemž i je imaginární jednotka;

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ -1 & 5 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Řešení. V prvním případě dostáváme

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix};$$

ve druhém potom

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.89. Za pomoci výpočtu inverzní matice určete řešení soustavy

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2,$$

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3,$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 5.$$

Řešení. Inverzní maticí k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

je

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Následně lze snadno získat

$$x_1 = 3\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = -\frac{3}{4}, \quad x_4 = \frac{1}{4}.$$

□

2.90. Napište inverzní matici k $n \times n$ matici ($n > 1$)

$$A = \begin{pmatrix} 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2-n & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ddots & \ddots & 2-n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \end{pmatrix}.$$

Řešení. Platí

$$A^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

□

2.91. Najděte adjungovanou matici F^* , je-li

$$F = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Řešení. Ze znalosti inverzní matice F^{-1} dostáváme

$$F^* = (\alpha\delta - \beta\gamma) F^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta & 0 \\ -\gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\delta - \beta\gamma \end{pmatrix} \quad \text{pro libovolná } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

□

2.92. Vypočítejte adjungované matice k maticím

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 3-2i & 6 \end{pmatrix},$$

přičemž i označuje imaginární jednotku.

Řešení. Hledanými maticemi jsou

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{pmatrix}, \quad (b) \begin{pmatrix} 6 & -2i \\ -3+2i & 1+i \end{pmatrix}.$$

□