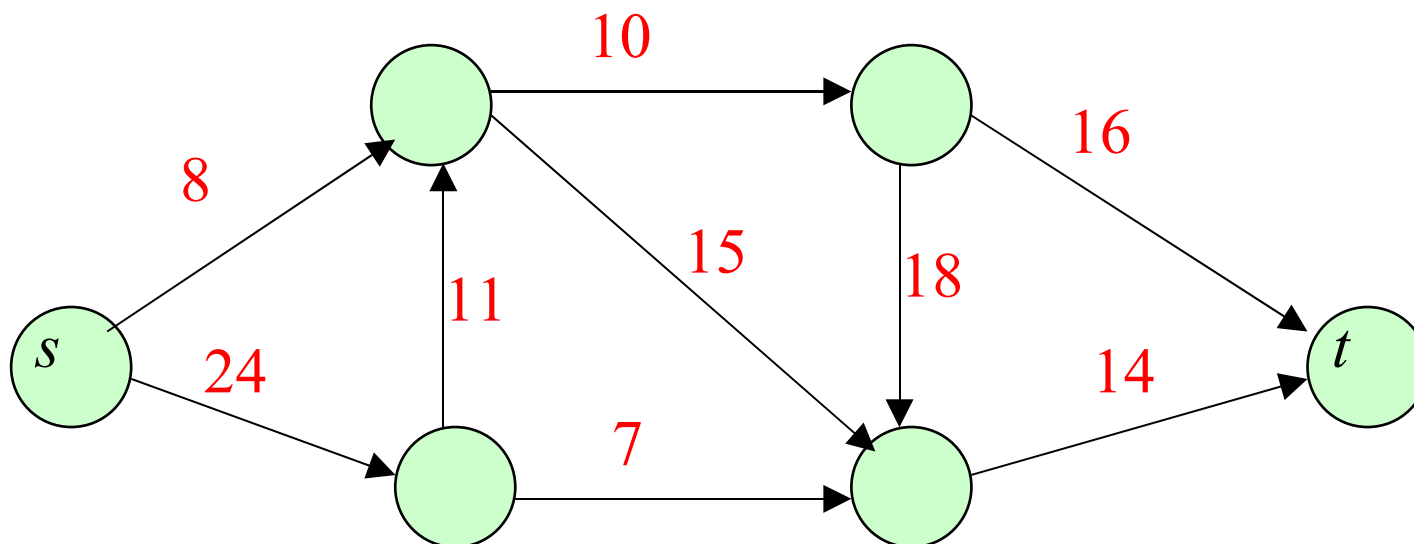


## Sít'

Sít' je čtveřice  $N = (G, s, t, c)$  kde  $G = (V, A)$  je prostý orientovaný graf a každé orientované hraně  $(u, v)$  je přiřazeno nezáporné číslo, které se nazývá **kapacita hrany**  $(u, v)$ , formálně  $c(u, v) \geq 0$ . Pro orientovanou hranu  $(u, v) \notin A$  předpokládáme  $c(u, v) = 0$ . V síti jsou dále vyznačeny dva speciální uzly: **zdrojový uzel**  $s$  a **cílový uzel**  $t$ . Dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že každý uzel leží na nějaké (orientované) cestě z uzlu  $s$  do uzlu  $t$ .

## Příklad síť



## Tok v síti

Tok v síti  $N = (G, s, t, c)$  je zobrazení  $f : V \times V \rightarrow R$  splňující následující podmínky:

1.  $f(u, v) \leq c(u, v), \forall u, v \in V$

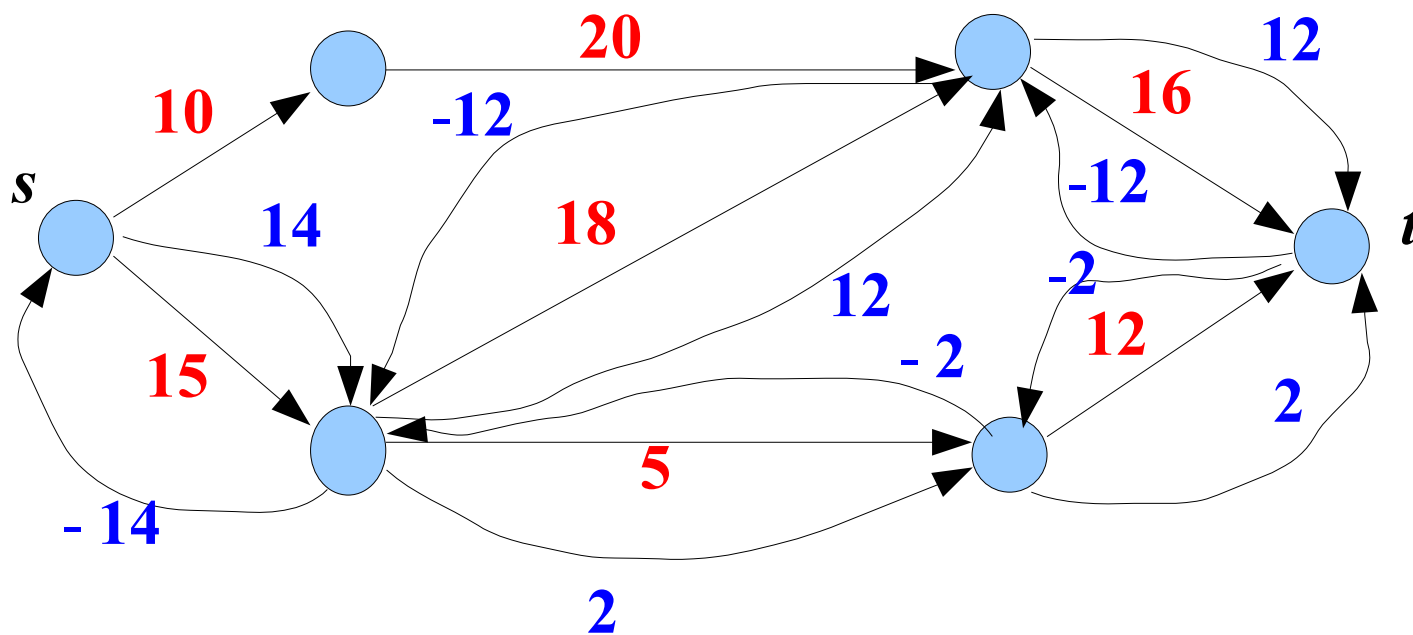
2.  $f(u, v) = -f(v, u), \forall u, v \in V$

3.  $\sum_{v \in V} f(u, v) = 0, \forall u \in V - \{s, t\}$

## Příklad toku v síti

Zde jsou kapacity hran vyznačeny červeně a hodnoty  $f(u, v)$  modře.

Absence hodnoty značí  $f(u, v) = 0$



- $f(u, v)$  se nazývá **tok** z uzlu  $u$  do uzlu  $v$ .
- $|f| = \sum_{u \in V} f(s, u)$  se nazývá **hodnota toku**  $f$
- $\sum_{u \in V} f(u, v)$  se nazývá **tok do uzlu**  $v$
- $\sum_{u \in V} f(v, u)$  se nazývá **tok z uzlu**  $v$
- $\sum_{\substack{u \in V \\ f(u, v) > 0}} f(u, v)$  se nazývá **kladný tok do uzlu**  $v$
- $\sum_{\substack{u \in V \\ f(v, u) > 0}} f(v, u)$  se nazývá **kladný tok z uzlu**  $v$

## Následující tvrzení jsou snadným důsledkem definice:

- $f(u, u) = -f(u, u), u \in V \Rightarrow f(u, u) = 0, u \in V$ , čili tok z uzlu do téhož uzlu je nulový.
- $\sum_{u \in V} f(u, v) = 0, \forall u \in V - \{s, t\}$ , čili celkový tok do každého uzlu různého od počátečního a cílového je nulový.
- Pokud mezi uzly  $u, v$  neexistuje hrana, potom  $f(u, v) = f(v, u) = 0$ .

## Sumační formalismus

Pro množiny uzlů  $X, Y \subseteq V$  bude symbol  $f(X, Y)$  znamenat

$$\sum_{u \in X} \sum_{v \in Y} f(u, v)$$

Někdy budeme vynechávat složené závorky  $\{, \}$  pro označení množin.

Například ve vzorci  $f(s, V - s) = f(s, V)$ , značí  $V - s$  množinu  $V - \{s\}$ .

## Lemma 1

Nechť  $N=(G, s, t, c)$  je síť,  $G=(V, A)$  prostý orientovaný graf,

$X, Y, Z \subseteq V$  a  $f$  tok v síti  $N$ , potom platí

$$(1) \quad f(X, Y) = -f(Y, X)$$

$$(2) \quad f(X, X) = 0$$

$$(3) \quad f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) \text{ if } X \cap Y = \emptyset$$



**Budeme řešit následující úlohu:**

Pro zadanou síť  $N = (G, s, t, c)$  najděte tok

$f_{\max}$  v síti  $N$ , který má maximální hodnotu,

čili,  $|f_{\max}| \geq |f|$  pro každý  $f$  v síti  $N$ .

## Ford-Fulkersonova metoda

Tato metoda spočívá na třech základních pojmech:

**zbytková síť,**

**vylepšující cesta**

**řez**

Začneme s nulovým tokem, čili  $f(u, v) = 0, \forall u, v \in V$ . Každou iterací najdeme vylepšující cestu, která zvětší aktuální tok, což je cesta z počátečního do cílového uzlu, podél které se podaří “protlačit” dodatečný tok. Iterace probíhají dokud se nám daří nacházet vylepšující cesty. Výsledný tok pak bude maximální.

## Zbytková kapacita, zbytková síť

Nechť  $N = (G, s, t, c)$  je síť a  $f$  tok v této síti. Pro každou dvojici uzlů  $u, v \in V$ , definujeme **zbytkovou kapacitu**

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$$

vzhledem k toku  $f$ . Dále definujeme **zbytkovou síť** vzhledem k toku  $f$

$$N_f = (G_f, s, t, c_f),$$

kde

$$G_f = (V, A_f)$$

a

$$A_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c_f(u, v) > 0\}$$

## Lemma 2

Nechť  $N = (G, s, t, c)$  je síť a  $f$  tok v této síti. Necht'  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$  je zbytková síť vzhledem k toku  $f$  a necht'  $\bar{f}$  je tok v síti  $N_f$ . Potom zobrazení  $(f + \bar{f}) : V \times V \rightarrow R$  takové, že

$$(f + \bar{f})(u, v) = f(u, v) + \bar{f}(u, v)$$

je tokem v síti  $N$ .

## Vylepšující cesta

Je-li dána síť  $N = (G, s, t, c)$  a tok  $f$  v ní definovaný, **vylepšující cesta** je jakákoliv (orientovaná) cesta z počátečního uzlu  $s$  do cílového uzlu  $t$  ve zbytkové síti  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$

Z definice zbytkové sítě plyne, že každá orientovaná hrana  $(u, v)$  ve vylepšující cestě zvyšuje tok z uzlu  $u$  do uzlu  $v$  při zachování podmínky 1 z definice toku.

## Kapacita vylepšující cesty

Je-li dána síť  $N = (G, s, t, c)$  s tokem  $f$ , a je-li  $p$  vylepšující cesta ve zbytkové síti  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$ , definujeme **kapacitu vylepšující cesty  $p$  vzhledem k toku  $f$**

$$c_f(p) = \min \{ c_f(u, v) \mid \text{hrana } (u, v) \text{ je obsažena v cestě } p \}$$

### Lemma 3

Nechť  $N = (G, s, t, c)$  je síť s tokem  $f$  a necht'  $p$  je vylepšující cesta ve zbytkové síti  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$ . Definujme zobrazení  $f_p: V \times V \rightarrow R$  následovně:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= c_f(p) && \text{jestliže hrana } (u, v) \text{ je v cestě } p \\ (*) \quad f(u, v) &= -c_f(p) && \text{jestliže hrana } (u, v) \text{ je v cestě } p \\ f(u, v) &= 0 && \text{jinak.} \end{aligned}$$

Potom  $f_p$  je tok v síti  $N_f$  s hodnotou  $|f_p| = c_f(p)$

## Důsledek 4

Nechť  $N = (G, s, t, c)$  je síť,  $f$  tok v této síti a  $p$  vylepšující cesta ve zbytkové síti  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$ . Nechť je definováno zobrazení

$f_p: V \times V \rightarrow R$  jako v Lemma 3. Potom zobrazení

$\bar{f}: V \times V \rightarrow R$ ,  $\bar{f}(u, v) = f(u, v) + f_p(u, v)$  je tokem v síti  $N$  a platí

$$|\bar{f}| = |f| + |f_p| > |f| .$$



*Při realizaci Ford-Fulkersonova algoritmu neustále zvyšujeme aktuální tok dokud dokážeme nalézt vylepšující cestu. Nyní dokážeme, že tok je maximální právě tehdy když už žádná vylepšující cesta ve zbytkové síti neexistuje. Je to důsledkem toho, že maximální tok se rovná minimálnímu řezu.*

## Řez v síti, tok řez, kapacita řezu

**Řez**  $(S, T)$  v síti  $N = (G, s, t, c)$  je každý rozklad množiny uzlů  $V$  na podmnožiny  $S$  a  $T = V - S$  takové, že  $s \in S$  a  $t \in T$ .

**Tok přes řez**  $(S, T)$  v síti  $N$  při daném toku  $f$  je číslo  $f(S, T)$ .

**Kapacita řezu**  $(S, T)$  v síti  $N$  je číslo  $c(S, T)$ .

*Zatímco tok přes řez může zahrnovat i záporné hodnoty toku mezi uzly, kapacita řezu je vždy součet kladných hodnot.*

## Lemma 5

Nechť je dána síť  $N = (G, s, t, c)$  s tokem  $f$  nechť  $(S, T)$  je řez v síti  $N$ .

Potom platí, že tok přes řez  $(S, T)$  se rovná hodnotě toku  $f$ , čili

$$f(S, T) = |f|.$$

### Důkaz:

Podle Lemma 1 (3) můžeme psát  $f(S, T) = f(S, V) - f(S, S)$  a podle Lemma 1 (2) platí  $f(S, T) = f(S, V)$ . Opět podle Lemma 1 (3) můžeme psát  $f(S, V) = f(s, V) + f(S - s, V)$ . Dále platí

$$f(S - s, V) = \sum_{\substack{u \in S \\ u \neq s}} \sum_{v \in V} f(u, v). \text{ Avšak } \sum_{v \in V} f(u, v) = 0 \text{ pro } u \neq s \text{ podle}$$

podmínky 3 z definice toku. Tedy  $f(S, T) = f(s, V) = |f|$

Jednoduchým důsledkem Lemma 5 je to, že hodnota toku se rovná celkovému toku do cílového uzlu. Další důsledek ukazuje, jak je možno použít kapacity k nalezení horního odhadu pro hodnotu toku.

### **Důsledek 6**

Hodnota každého toku v síti  $N = (G, s, t, c)$  je menší nebo rovna kapacitě každého řezu v síti  $N$ .

### **Důkaz:**

Nechť  $(S, T)$  je řez. Podle Lemma 5 a podmínky 1 z definice toku platí

$$|f| = f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) \leq \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v) = c(S, T)$$

## Věta 7 (o maximálním toku a minimálním řezu)

Nechť  $N = (G, s, t, c)$  je síť s tokem  $f$ . Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1)  $f$  je a maximální tok v síti  $N$
- (2) ve zbytkové síti  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$  nejsou žádné vylepšující cesty
- (3) je-li  $(S, T)$  řez v síti  $N$  s minimální kapacitou, platí  $|f| = c(S, T)$

### Důkaz:

(1)  $\Rightarrow$  (2): Nechť  $f$  je maximální tok v síti  $N$  a předpokládejme, že v  $G_f$  existuje vylepšující cesta. Potom podle Důsledku 4 suma toků  $f + f_p$  kde  $f_p$  je definováno vztahem (\*) je tok v síti  $N$  s hodnotou větší než  $|f|$ , což je spor s tím, že  $f$  je maximální tok.

(2)  $\Rightarrow$  (3): Necht' neexistuje vylepšující cesta v  $N_f$ . Neexistuje tedy orientovaná cesta v grafu  $G_f$ , z počátečního uzlu  $s$  do cílového uzlu  $t$ . Definujme množiny  $S, T$  takto:

$S = \{u \in V \mid \text{v grafu } G_f \text{ existuje cesta z uzlu } s \text{ do uzlu } u\}$ ,  $T = U - S$   
Rozklad  $(S, T)$  je řezem neboť  $s \in S$  a  $t \notin S$ , protože v grafu  $G_f$  neexistuje cesta z uzlu  $s$  do uzlu  $t$ . Pro každé dva uzly  $(u, v)$ ,  $u \in S, v \in T$  platí  $f(u, v) = c(u, v)$ , protože jinak by platilo  $(u, v) \in A_f$  a tedy  $v \in S$ . Proto podle Lemma 5 platí  $|f| = f(S, T) = c(S, T)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (1): Podle důsledku 6 platí  $|f| \leq c(S, T)$  pro každý řez  $(S, T)$ . Proto ze vztahu  $|f| = c(S, T)$  plyne, že  $f$  je maximální tok.

# SCHÉMA FORD FULKERSONOVA ALGORITMU

---

1. Položíme  $f[u, v] = 0$ ,  $f[v, u] = 0$  pro každé dva uzly  $u, v \in V$

---

2. Vypočítáme zbytkové kapacity  $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$ .

Vytvoříme zbytkovou síť  $N_f = (G_f, s, t, c_f)$ , kde  $G_f = (V, A_f)$  a  $A_f = \{(u, v) \in V \times V \mid c(u, v) > 0\}$

3. Pokud neexistuje orientovaná cesta  $p$  v grafu  $G_f$  mezi počátečním a cílovým uzlem, algoritmus končí a poslední tok  $f$  je maximální. Jinak nalezneme takovou orientovanou cestu a označíme ji  $p$ .

---

4. Vypočítáme  $c_f(p) = \min \{c_f(u, v) \mid \text{hrana } (u, v) \text{ je v cestě } p\}$

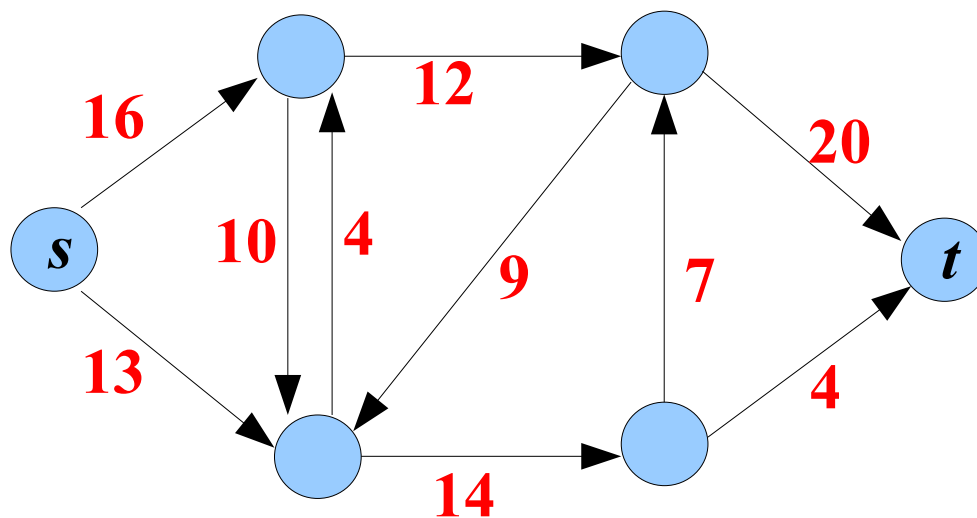
Pro každou dvojici uzlů  $(u, v)$  z cesty  $p$  spočítáme:

$f(u, v) = f(u, v) + c_f(p)$ ,  $f(v, u) = f(v, u) - c_f(p)$ . Přejdeme na 2.

---

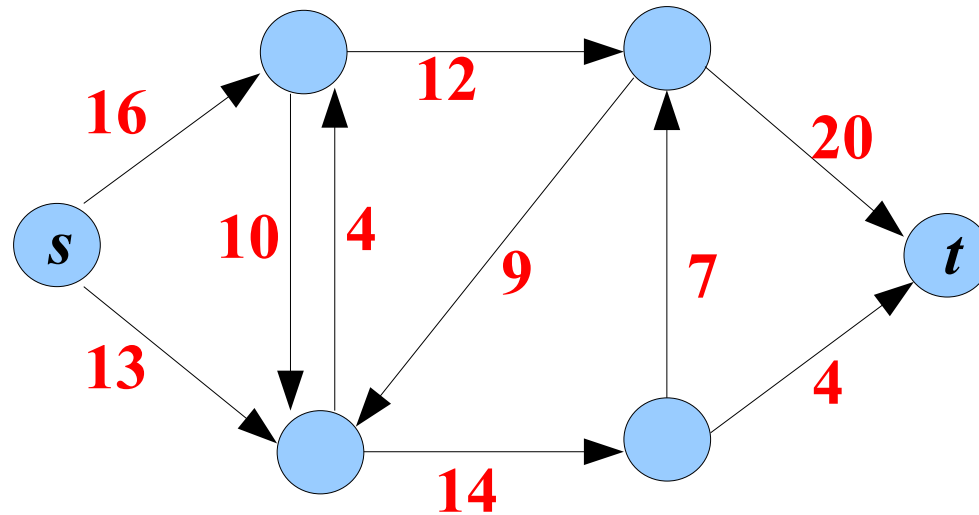
## Příklad

Najděte maximální tok v síti s počátečním uzlem  $s$  a cílovým uzlem  $t$ .

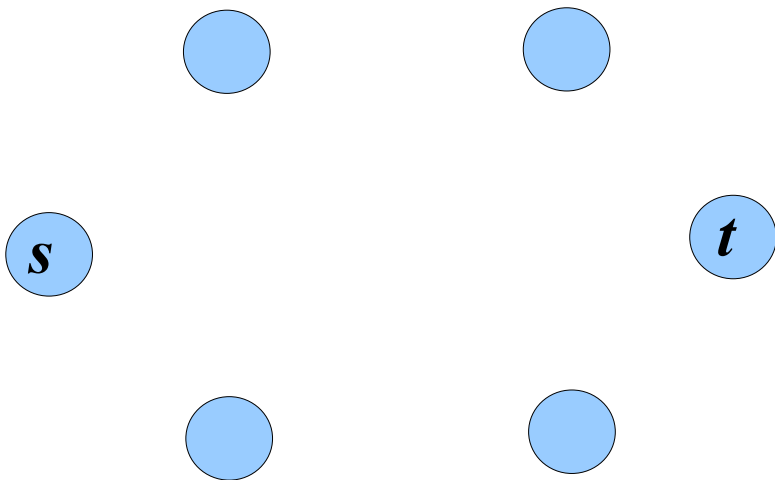




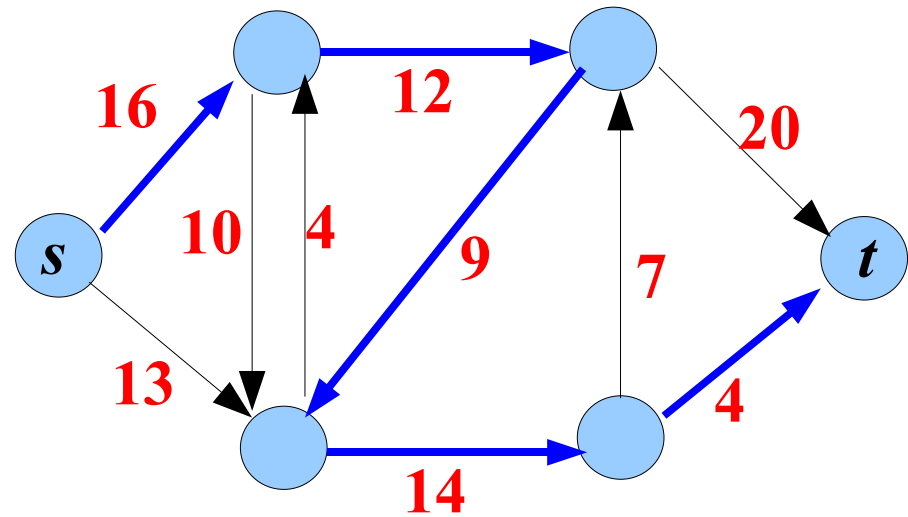
# Řešení – 1. iterace



Hodnota toku = 0

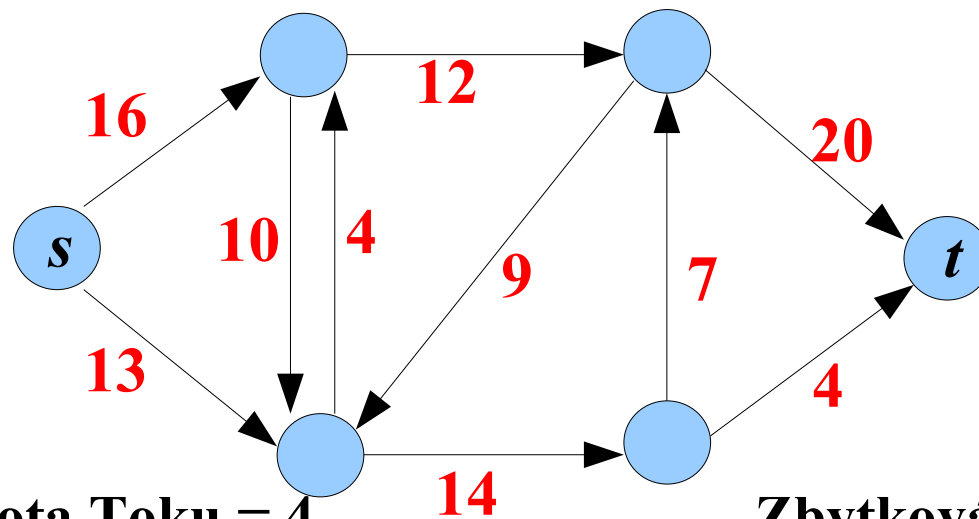


Zbytková síť



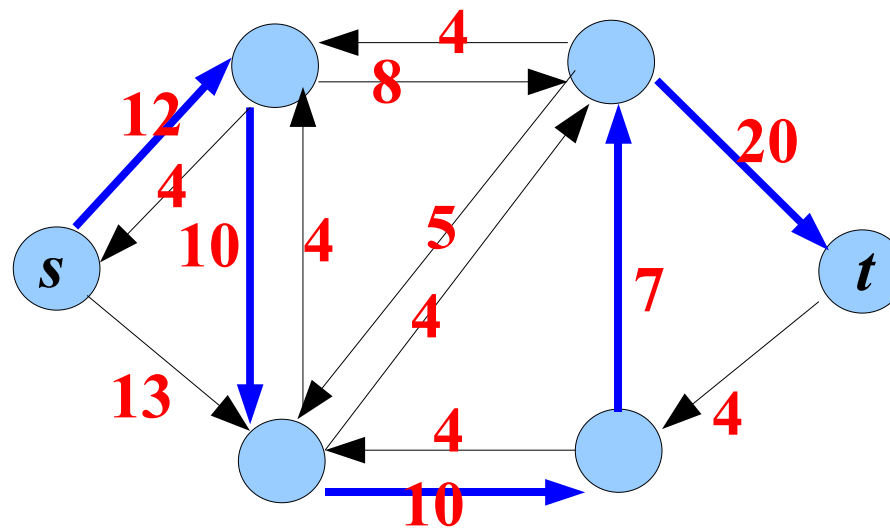
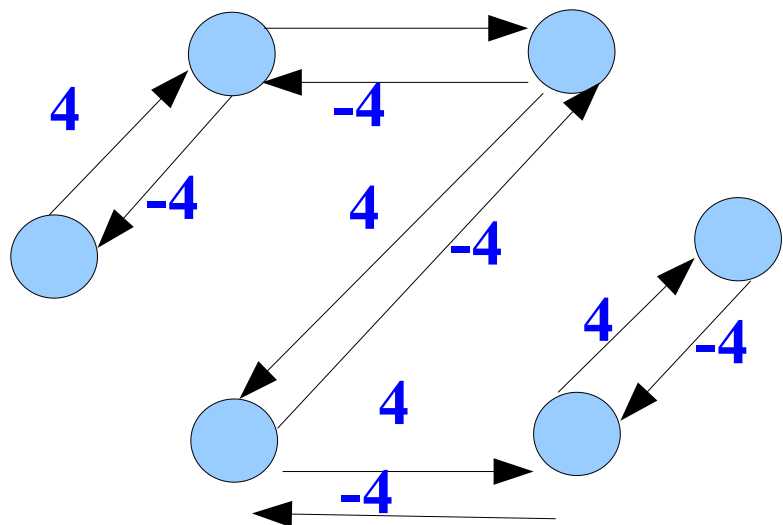
Modrá vylepšující cesta s kapacitou 4

# Řešení – 2. iterace:



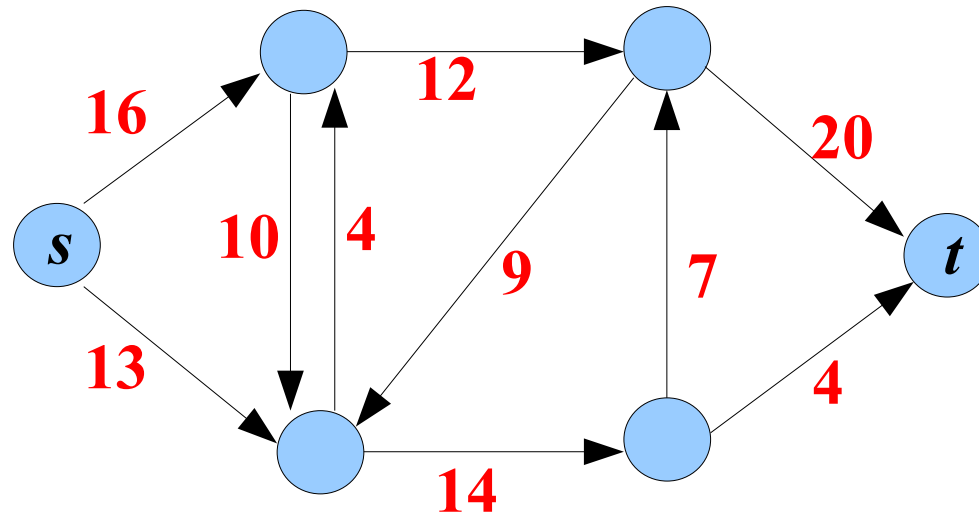
Hodnota Toků = 4

Zbytková síť

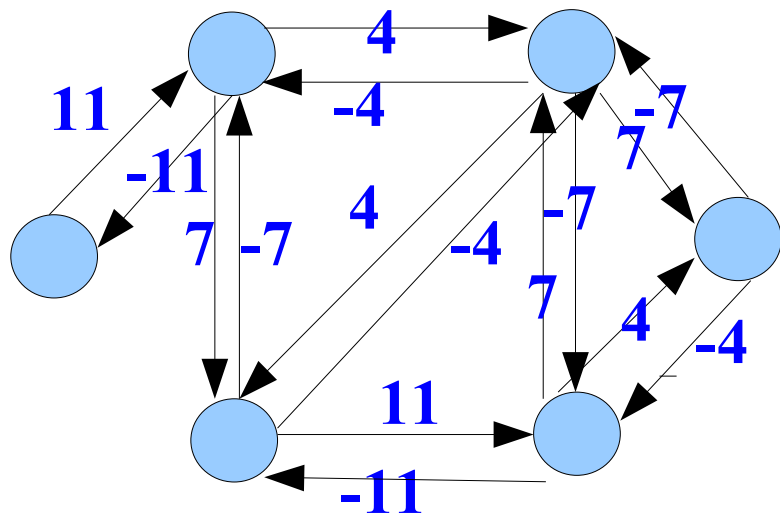


Modrá vylepšující cesta s kapacitou 7

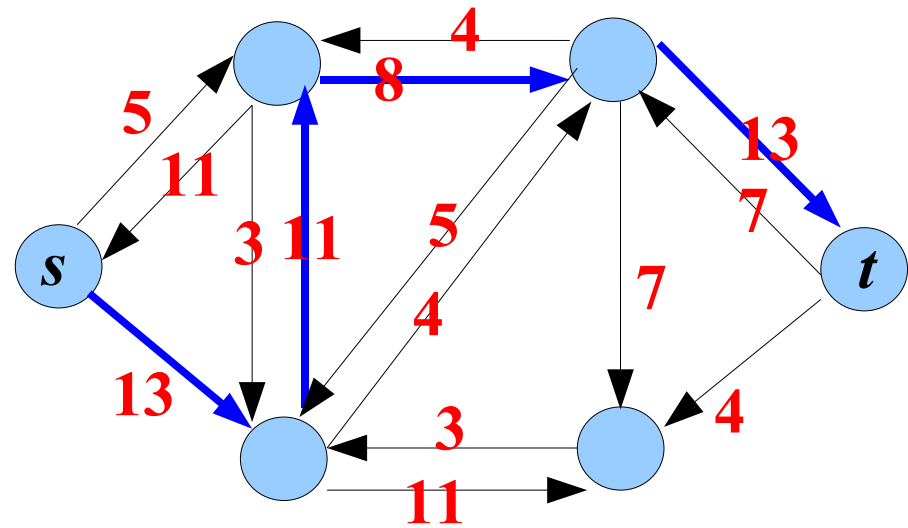
# Řešení – 3. iterace:



Hodnota toku = 11

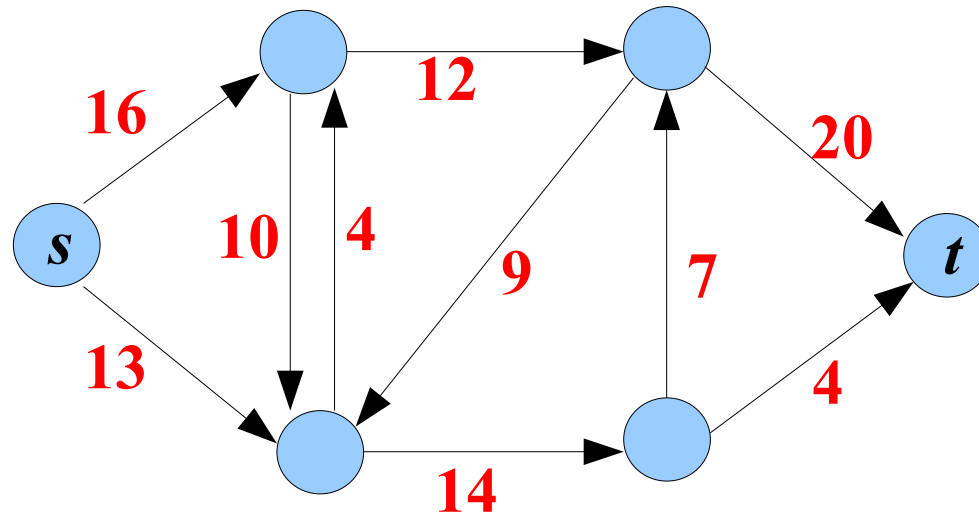


Zbytková síť

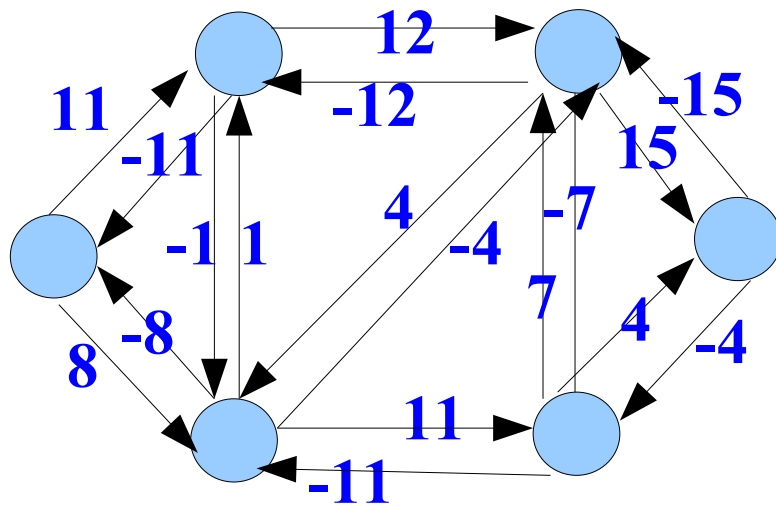


Modrá vylepšující cesta s kapacitou 8

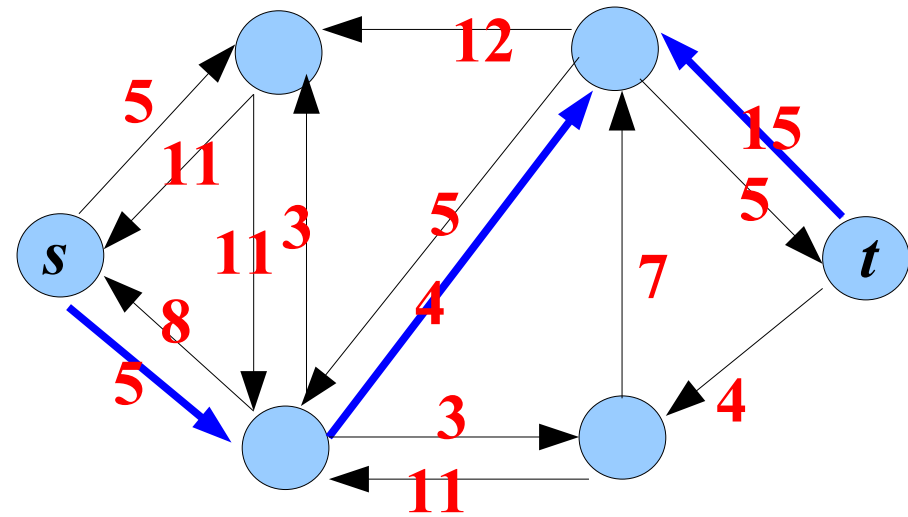
# Řešení – 4. iterace:



Hodnota toku = 19

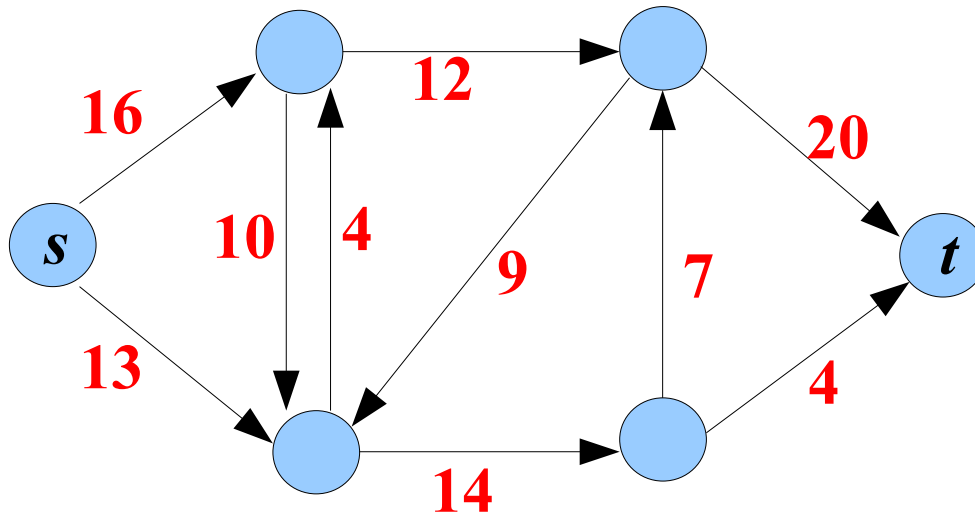


Zbytková síť

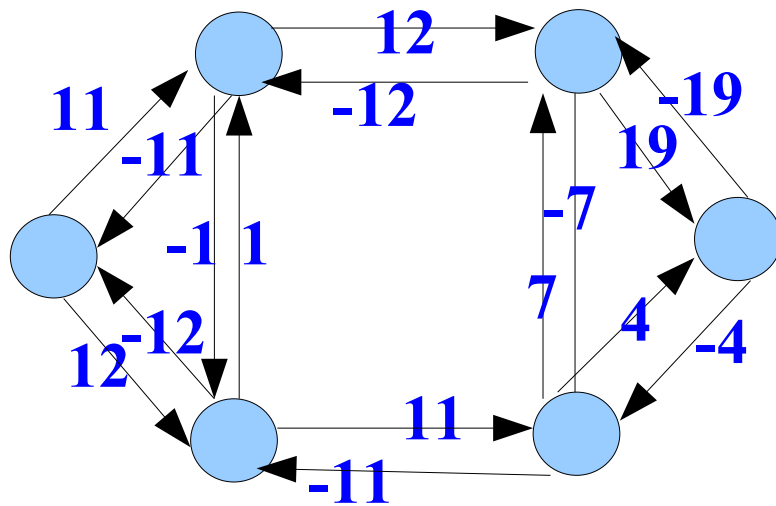


Modrá vylepšující cesta s kapacitou 4

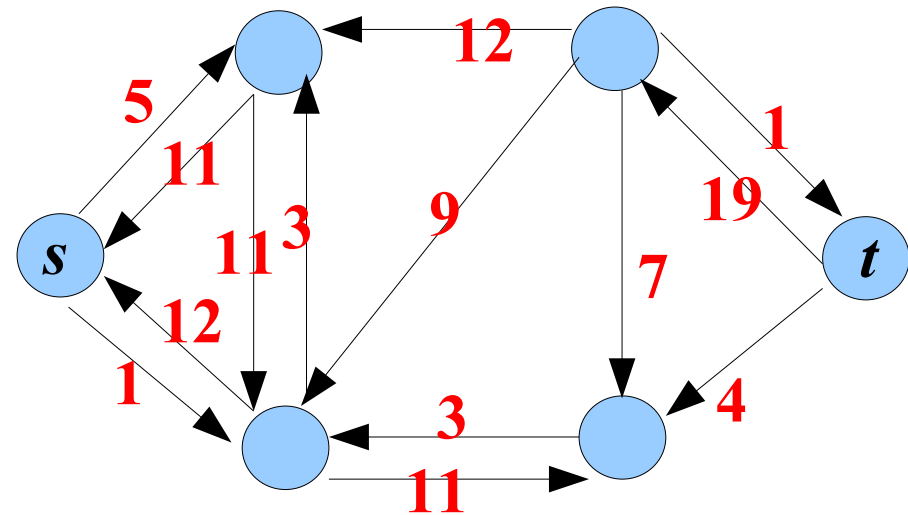
## Řešení – 5. iterace:



Hodnota toku = 23



Zbytková síť



Ve zbytkové síti neexistuje vylepšující cesta, hodnota toku je maximální.