Matematika III – 6. přednáška
Integrace funkcí více proměnných, numerické metody

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

27. 10. 2010

Obsah přednášky

Plán přednášky

1. Literatura
2. Integrální počet více proměnných
   - Násobné integrály
   - Záměna souřadnic při integraci
   - Některá využití integrálů více proměnných ve fyzice
3. Numerické metody
   - Interpolace vs. aproximace
   - Numerické derivování
   - Numerická kvadratura (integrování)

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, e-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Boris Pavlovič Děmidovič, Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy, Fragment, 2003.
- Emil Vitásek, Numerické metody, SNTL, 1987.

Plán přednášky

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce $\varphi, \psi, \eta, \zeta$ konstantní.)

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd. (Zejména tedy i případy, kdy jsou funkce $\varphi, \psi, \eta, \zeta$ konstantní.)

Věta

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \ldots, z) dx \ldots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \ldots \left(\int_{\eta(x,y,\ldots)}^{\zeta(x,y,\ldots)} f(x, y, \ldots, z) dz \right) \ldots dy \right) dx$$

Přímým důsledkem pro konstatní funkce je:

Věta

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *a spojitou funkci* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *na* S *je násobný integrál*

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \right) \ldots \right) dx_n$$

nezávislý na pořadí, ve kterém postupně integraci provádíme.

Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1]\times[0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\, dxdy.$$

Příklad (nezávislé meze integrace)

Vypočtěte dvojný integrál

$$I = \int_{[0,1]\times[0,3]} 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\,dxdy.$$

Řešení

S využitím předchozí věty dostáváme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 \left(\int_0^1 3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2\,dx \right) dy = \\ &= \int_0^3 \left[(x-1)^3 + x(y-2)^2 + 2x \right]_{x=0}^{1} dy \\ &= \int_0^3 (y-2)^2 + 3\,dy = [\tfrac{1}{3}(y-2)^3 + 3y]_0^3 = 12 \end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme i při integraci v opačném pořadí.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2 \, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2\, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$, přičemž pro $x \in [0,1]$ je $x^2 \leq x$.

Příklad (závislé meze integrace)

Vypočtěte integrál

$$I = \int_S xy^2\, dxdy,$$

kde S je plocha v 1. kvadrantu E_2 ohraničená grafy funkcí $y = x$ a $y = x^2$.

Řešení

Snadno je vidět, že grafy se protínají v bodech $[0,0]$ a $[1,1]$, přičemž pro $x \in [0,1]$ je $x^2 \leq x$. Proto je

$$I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} xy^2\, dy \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \left[xy^3 \right]_{y=x^2}^{x} dx =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^1 (x^4 - x^7)\, dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{40}.$$

Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.
Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou:

Záměna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj. Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných. Připomeňme nejdříve, jak je to s transformacemi pro jednu proměnnou: Integrovaný výraz $f(x)dx$ vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné x a hodnotou $f(x)$. Pokud proměnnou transformujeme vztahem $x = u(t)$, vyjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt}dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t))\frac{du}{dt}dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace $u'(t)$ je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů (http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution#Substitution_for_multiple_variables).

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů (http://en.wikipedia.org/wiki/Integration_by_substitution#Substitution_for_multiple_variables).

Věta

Nechť $G(t_1, \ldots, t_n) : E_n \to E_n$, $[x_1, \ldots, x_n] = G(t_1, \ldots, t_n)$, je spojitě diferencovatelné zobrazení, T a $S = G(T)$ jsou Riemannovsky měřitelné množiny a $f : S \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Potom platí

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots x_n =$$
$$\int_T f(G(t_1, \ldots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \ldots, t_n))| dt_1 \ldots dt_n.$$

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce $f(x, y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce $f(x,y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s,t) = (g(s,t), h(s,t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x,y)dxdy = \int_T f(g(s,t), h(s,t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} \right| dsdt.$$

Konkrétně: spočtěme integrál z charakteristické funkce kruhu o poloměru R (tj. jeho obsah) definovaného v polárních souřadnicích.

Abychom si přiblížili obsah tvrzení poslední věty, uvedeme jeho speciální případ pro integrál funkce $f(x, y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s, t) = (g(s, t), h(s, t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x, y) dx dy = \int_T f(g(s, t), h(s, t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial s} \right| ds dt.$$

Konkrétně: spočtěme integrál z charakteristické funkce kruhu o poloměru R (tj. jeho obsah) definovaného v polárních souřadnicích.
Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r, \varphi) = r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici S o poloměru R, která je obrazem obdélníku $(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi] = T$:

$$\int_S dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^R r\, dr\, d\varphi = \int_0^R 2\pi r\, dr = \pi R^2.$$

Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

Příklad (využití polárních souřadnic)

Zjednodušte dvojný integrál

$$I = \int_{x^2+y^2\leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2})\, dxdy$$

na jednoduchý přechodem k polárním souřadnicím.

Řešení

Z předchozího víme, že při transformaci $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ je determinant Jacobiho matice roven r. Proto

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 f(r) \cdot r\, dr \right) d\varphi =$$

$$= \int_0^1 f(r) \cdot r \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^1 f(r) \cdot r\, dr.$$

Časté transformace souřadnic v E_3

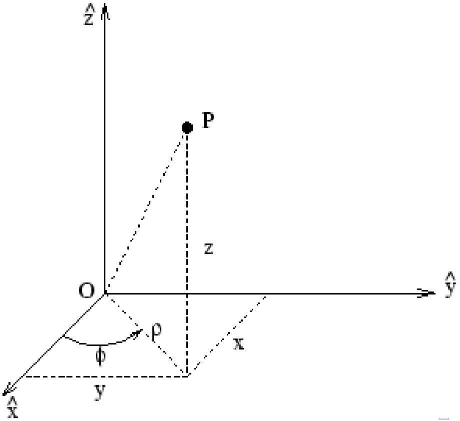
Válcové souřadnice Zobrazení $G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ z = z,$$

Časté transformace souřadnic v E_3

Válcové souřadnice Zobrazení
$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r \cos \varphi, \;\; y = r \sin \varphi, \;\; z = z,$$



Válcové souřadnice Zobrazení $G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$
$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, z = z\right),$$

Válcové souřadnice Zobrazení
$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$
$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, z = z\right),$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Válcové souřadnice Zobrazení
$G : \{[r, \varphi, z]; r \geq 0, \varphi \in [0, 2\pi), z \in \mathbb{R}\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z,$$
$$\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, z = z\right),$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proto je $\det D^1 G = r$.

Časté transformace souřadnic v E_3

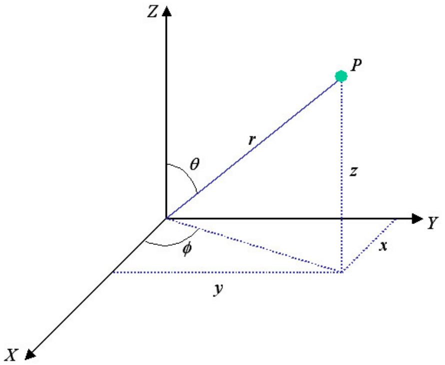
Sférické souřadnice Zobrazení $G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \; y = r \sin\theta \sin\varphi, \; z = r \cos\theta,$$

Časté transformace souřadnic v E_3

Sférické souřadnice Zobrazení $G : \{[r, \theta, \varphi]; r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \;\; y = r \sin\theta \sin\varphi, \;\; z = r \cos\theta,$$



Sférické souřadnice Zobrazení $G : \{[r,\theta,\varphi]; r \geq 0, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right),$$

a tedy

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Sférické souřadnice Zobrazení $G : \{[r,\theta,\varphi]; r \geq 0, \theta \in [0,\pi], \varphi \in [0,2\pi)\} \to E_3$ je dáno předpisem

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$$

$$\left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right),$$

a tedy

$$D^1G = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Proto je

$$\begin{aligned} \det D^1G &= r^2\sin^3\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \\ &+ r^2\cos^2\theta\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi = \\ &= r^2\sin^3\theta + r^2\cos^2\theta\sin\theta = r^2\sin\theta. \end{aligned}$$

Příklad

Vypočtěte objem koule o poloměru R.

Příklad

Vypočtěte objem koule o poloměru R.

Řešení

Koule $B(R)$ o poloměru R je dána ve sférických souřadnicích (r, θ, φ) jednoduchou podmínkou $r \leq R$. Je tedy obrazem intervalu $U = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, přičemž víme, že objemový element (tj. determinant jakobiánu transformačního zobrazení) je roven $r^2 \sin \theta$. Proto je objem koule roven

Příklad

Vypočtěte objem koule o poloměru R.

Řešení

Koule $B(R)$ o poloměru R je dána ve sférických souřadnicích (r, θ, φ) jednoduchou podmínkou $r \leq R$. Je tedy obrazem intervalu $U = [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi)$, přičemž víme, že objemový element (tj. determinant jakobiánu transformačního zobrazení) je roven $r^2 \sin\theta$. Proto je objem koule roven

$$\int_B 1\, dx\, dy\, dz = \int_U r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} R^3 \pi.$$

Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

kde množina V je vymezena plochou $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Příklad

Vypočtěte integrál

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz,$$

kde množina V je vymezena plochou $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Řešení

Transformací do sférických souřadnic dostáváme (grafem plochy je koule se středem v $[0, 0, 1/2]$ a poloměrem $1/2$) – promyslete meze!

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos\theta} r \cdot r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= \ldots = \frac{\pi}{10}.$$

Určování mezí integrace

Častým obtížným úkolem je při integraci v E_3 určování integračních mezí. V tom nám může pomoci:

- prostorová představivost

Určování mezí integrace

Častým obtížným úkolem je při integraci v E_3 určování integračních mezí. V tom nám může pomoci:

- prostorová představivost
- u symetrických objektů omezení pouze na výpočet v části objektu

Určování mezí integrace

Častým obtížným úkolem je při integraci v E_3 určování integračních mezí. V tom nám může pomoci:

- prostorová představivost
- u symetrických objektů omezení pouze na výpočet v části objektu
- zakreslení řezu objektu vhodnými rovinami (často $x = 0, y = 0$ nebo $z = 0$, případně využití SW pro vykreslení prostorového grafu.

Využití ve fyzice

Hmotnost tělesa

Těleso o objemu V a hustotě v bodě $[x, y, z]$ dané funkcí $\rho(x, y, z)$ má hmotnost danou vztahem

$$M = \int_V \rho \, dxdydz.$$

Využití ve fyzice

Hmotnost tělesa
Těleso o objemu V a hustotě v bodě $[x, y, z]$ dané funkcí $\rho(x, y, z)$ má hmotnost danou vztahem

$$M = \int_V \rho \, dxdydz.$$

Těžiště tělesa
Těleso o objemu V a hustotě v bodě $[x, y, z]$ dané funkcí $\rho(x, y, z)$ má souřadnice těžiště $[x_0, y_0, z_0]$ dané vztahy

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_V x\rho \, dxdydz, \;\; y_0 = \frac{1}{M} \int_V y\rho \, dxdydz, \;\; z_0 = \frac{1}{M} \int_V z\rho \, dxdydz.$$

Využití ve fyzice – pokr.

Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose ℓ je

$$I_\ell = \int_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde r je funkce závislosti bodu $[x, y, z]$ od osy ℓ.

Využití ve fyzice – pokr.

Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose ℓ je

$$I_\ell = \int_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde r je funkce závislosti bodu $[x, y, z]$ od osy ℓ.

Příklad

Určete souřadnice těžiště kruhové destičky $x^2 + y^2 \leq a$, je-li její hustota v bodě $[x, y]$ přímo úměrná vzdálenosti od bodu $[a, 0]$.

$\left[x_T = -\frac{a}{5}, y_T = 0\right]$

Využití ve fyzice – pokr.

Moment setrvačnosti

Momentem setrvačnosti tělesa vzhledem k dané ose ℓ je

$$I_\ell = \int_V \rho r^2 \, dx \, dy \, dz,$$

kde r je funkce závislosti bodu $[x, y, z]$ od osy ℓ.

Příklad

Určete souřadnice těžiště kruhové destičky $x^2 + y^2 \leq a$, je-li její hustota v bodě $[x, y]$ přímo úměrná vzdálenosti od bodu $[a, 0]$.

$\left[x_T = -\frac{a}{5}, y_T = 0\right]$

Příklad

Vypočtěte moment setrvačnosti homogenního válce $x^2 + y^2 \leq a^2$ o hustotě ρ_0 vzhledem k ose tvořené přímkou $x = y = z$.

$\left[\frac{M}{3}\left(a^2 + \frac{2}{3}h^2\right)\right]$

Plán přednášky

Interpolace a aproximace – opakování

Interpolace – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech $x_0, \ldots, x_n$. Formule musí v těchto bodech dodržet danou funkční hodnotu (např. interpolační polynom stupně n). Mimo interval – *extrapolace*.

Interpolace a aproximace – opakování

Interpolace – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech $x_0, \ldots, x_n$. Formule musí v těchto bodech dodržet danou funkční hodnotu (např. interpolační polynom stupně n). Mimo interval – *extrapolace*.
Aproximace – stanovení formule pro funkci, kterou máme zadánu v bodech $x_0, \ldots, x_n$. Formule má obvykle méně "stupňů volnosti" než n, proto danou funkční hodnotu obvykle nejde dodržet. Snažíme se najít nejlepší možnou aproximaci podle předem daného kritéria (např. metoda nejmenších čtverců).

Polynomiální interpolace

Lagrangeův interpolační polynom

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x),$$

kde

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

Polynomiální interpolace

Lagrangeův interpolační polynom

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x),$$

kde

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hermiteův interpolační polynom – kromě funkčních hodnot známe v daných bodech i hodnotu derivace.

Polynomiální interpolace

Lagrangeův interpolační polynom

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x),$$

kde

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hermiteův interpolační polynom – kromě funkčních hodnot známe v daných bodech i hodnotu derivace.

Interpolace (kubickými) splajny – intepolace po částech kubickými polynomy, přičemž v uzlových bodech požadujeme rovnost 1. a 2. derivací sousedních polynomů.

Polynomiální interpolace

Lagrangeův interpolační polynom

$$f(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_n\ell_n(x),$$

kde

$$\ell_i(x) = \frac{\prod_{j\neq i}(x - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}.$$

Hermiteův interpolační polynom – kromě funkčních hodnot známe v daných bodech i hodnotu derivace.

Interpolace (kubickými) splajny – intepolace po částech kubickými polynomy, přičemž v uzlových bodech požadujeme rovnost 1. a 2. derivací sousedních polynomů.

Trigonometrická interpolace – interpolační polynom

$$Q_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{j=1}^{n} (A_j \cos jx + B_j \sin jx)\,,$$

jehož koeficienty obvykle počítáme pomocí *rychlé Fourierovy transformace – FFT*.

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Slouží k rekonstrukci funkce f z hodnot $f_0, \dots, f_n$ naměřených v uzlových bodech $a_0, \dots, a_n$. Tuto rekonstrukci hledáme vzhledem k danému modelu – dané posloupnosti funkcí (obecně více proměnných) $g_0(x), \dots, g_m(x), \dots$ – ve tvaru

$$y_m(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j g_j(x).$$

Cílem je při tom minimalizovat "součet čtverců"

$$\sum_{i=0}^{n} \left(f_i - y_m(a_i)\right)^2.$$

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Typy modelů:

- $g_j(x)$ – obecný polynom stupně j

Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Typy modelů:

- $g_j(x)$ – obecný polynom stupně j
- $g_j(x)$ – ortogonální polynomy na dané množině bodů

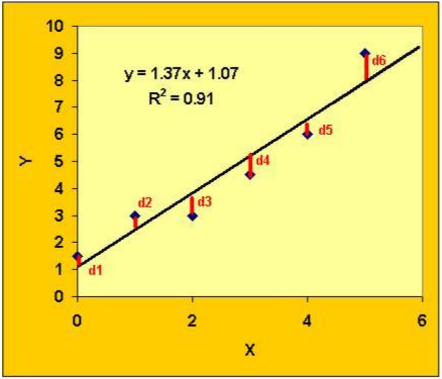
Aproximace metodou nejmenších čtverců

Aplikace – lineární (multilineární) regrese ve statistice

Typy modelů:

- $g_j(x)$ – obecný polynom stupně j
- $g_j(x)$ – ortogonální polynomy na dané množině bodů
- $g_j(x)$ – trigonometrický polynom

Aproximace metodou nejmenších čtverců



Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.
Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální.

Ukažme si použití této metody v nejjednodušším případě, kdy máme dáno n bodů $([x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n])$ a hledáme přímku, která nejlépe *vystihuje* rozložení těchto bodů.
Hledáme tedy funkci tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ s neznámými $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby hodnota

$$\sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

byla minimální. S využitím diferenciálního počtu lze snadno odvodit následující tvrzení.

Věta

Mezi přímkami tvaru $f(x) = a \cdot x + b$ má nejmenší součet čtverců vzdáleností funkčních hodnot v bodech $x_1, \dots, x_n$ od hodnot y_i funkce splňující

$$a \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$$
$$a \sum x_i + b \cdot n = \sum y_i$$

Metoda nejmenších čtverců

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Metoda nejmenších čtverců

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Metoda nejmenších čtverců

Příklad

Metodou nejmenších čtverců určete regresní přímku odpovídající naměřeným datům:

x	1	2	3	4
y	1.5	1.6	2.1	3.0

Řešení

Data je vhodné seřadit v tabulce podle schématu:

x	y	xy	x^2
1	1.5	1.5	1
2	1.6	3.2	4
3	2.1	6.3	9
4	3	12	16
10	8.2	23	30

Odtud $a = 0{,}5$, $b = 0{,}8$.

Numerické derivování

Uvedeno pouze pro úplnost, metody velmi jednoduché, založené na definici derivace. Často dávají velmi nepřesný výsledek. Uvedeme zde pouze pro případ funkcí jedné proměnné, ve více proměnných počítáme parciální derivace analogicky.

Numerické derivování

Uvedeno pouze pro úplnost, metody velmi jednoduché, založené na definici derivace. Často dávají velmi nepřesný výsledek. Uvedeme zde pouze pro případ funkcí jedné proměnné, ve více proměnných počítáme parciální derivace analogicky.
Pro výpočet odhadu k-té derivace funkce v daném bodě, známe-li hodnoty této funkce v několika bodech, lze využít *interpolaci* této funkce, např. Lagrangeův interpolační polynom.

Numerické derivování

V praxi se často používají jednoduché několikabodové vzorce pro odhad derivace:

Numerické derivování

V praxi se často používají jednoduché několikabodové vzorce pro odhad derivace:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)),$$

Numerické derivování

V praxi se často používají jednoduché několikabodové vzorce pro odhad derivace:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)),$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right),$$

Numerické derivování

V praxi se často používají jednoduché několikabodové vzorce pro odhad derivace:

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)),$$

$$f'(x) \approx \frac{1}{2h}\left(f(x+h) - f(x-h)\right),$$

nebo pětibodový vzorec

$$f'(x) \approx \frac{1}{12h}\left(-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)\right).$$

Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)

Numerická integrace (kvadratura)

Numerická integrace nachází uplatnění zejména v následujících případech:

- integrovanou funkci neznáme přímo, známe jen její hodnoty v některých bodech (např. z měření)
- integrovaná funkce je známá, ale její primitivní funkci (antiderivaci) je obtížné (či dokonce nemožné) vyjádřit jakožto *elementární funkci*.

Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem "pod plochou" apod. Podobně jako u derivování i zde můžeme využít interpolační polynomy.

Numerická kvadratura

Přímo z definice Riemannova integrálu – snaha odhadnout plochu pod křivkou, objem "pod plochou" apod. Podobně jako u derivování i zde můžeme využít interpolační polynomy.

Newton-Cotesovy vzorce

Interval $[a, b]$, nad kterým integrujeme, rozdělíme na n **stejných** částí (délky h) tak, že v krajních bodech těchto částí známe hodnotu integrované funkce. Podle toho, jestli uvažujeme i hodnoty v krajních bodech a a b intervalu, rozlišujeme Newton-Cotesovy formule na *uzavřené* a *otevřené*.

Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

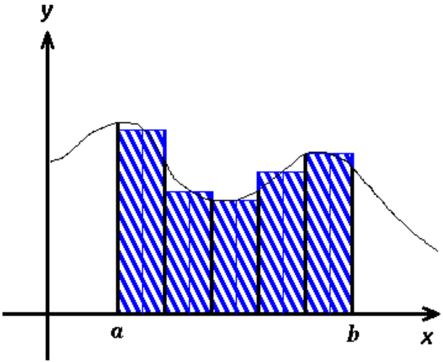
w_i jsou váhy (uzavřený tvar).

Váhy snadno odvodíme např. pomocí Lagrangeovy interpolace.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L(x)\,dx = $$
$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \underbrace{\int_a^b \ell_i(x)\,dx}_{w_i}.$$

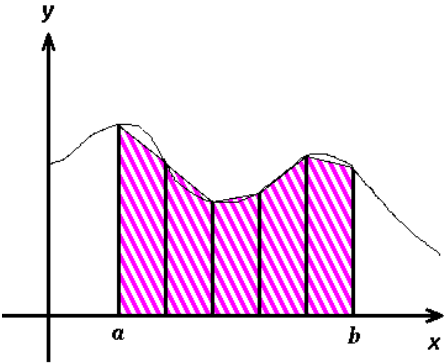
obdélníkové pravidlo (otevřená Newton-Cotesova formule) – interpolace konstatní funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$



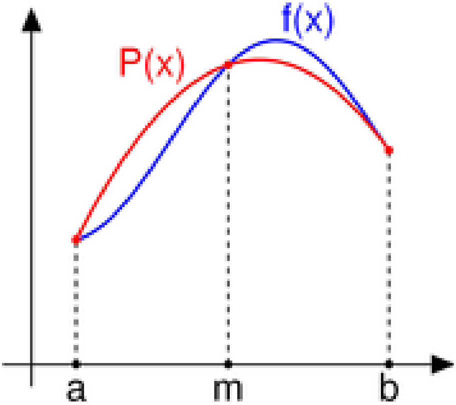
lichoběžníkové pravidlo (uzavřená Newton-Cotesova formule) – interpolace lineární funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$



Simpsonovo pravidlo (uzavřená Newton-Cotesova formule) – interpolace kvadratickou funkcí

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right].$$



Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Řešení

- lichoběžníkové pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$

Příklad

Pomocí lichoběžníkového, resp. Simpsonova pravidla vypočtěte

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx.$$

Řešení

- lichoběžníkové pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \approx 0.785$
- Simpsonovo pravidlo: $I \approx \frac{\pi}{12} \left(0 + 4\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) \approx 1.003.$

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

Princip – výpočet objemu tělesa V uvnitř jednotkové krychle:

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

Princip – výpočet objemu tělesa V uvnitř jednotkové krychle:

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.
Princip – výpočet objemu tělesa V uvnitř jednotkové krychle:

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa
- opakujeme

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.

Princip – výpočet objemu tělesa V uvnitř jednotkové krychle:

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa
- opakujeme

Metody Monte Carlo

Obvykle používané u vícerozměrných integrálů, kde je často výrazně přesnější a efektivnější než násobné použití metod na numerickou integraci jednorozměrných integrálů.
Princip – výpočet objemu tělesa V uvnitř jednotkové krychle:

- vygenerujeme náhodný bod uvnitř jednotkové krychle
- zjistíme, zda leží uvnitř tělesa
- opakujeme

Podíl objemu tělesa a krychle je pak aproximován relativní četností jevu, že náhodný bod leží uvnitř tělesa.

Metody Monte Carlo

Integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ tak aproximujeme pomocí výběru náhodných n bodů x_i z intervalu $[a, b]$, ve kterých určíme funkční hodnoty.
Pak

Metody Monte Carlo

Integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ tak aproximujeme pomocí výběru náhodných n bodů x_i z intervalu $[a, b]$, ve kterých určíme funkční hodnoty. Pak

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$