Matematika III – 8. přednáška
Grafy a algoritmy – cesty a souvislost

Michal Bulant

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. 11. 2010

Obsah přednášky

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/
- Rensselaer Polytechnic Institute – Graph Theory Applet (`http://links.math.rpi.edu/applets/appindex/graphtheory.html`).
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Doporučené zdroje

- Martin Panák, Jan Slovák, Drsná matematika, *e*-text.
- *Předmětové záložky v IS MU*
- Jiří Matoušek, Jaroslav Nešetřil, Kapitoly z diskrétní matematiky, Univerzita Karlova v Praze, Karolinum, Praha, 2000, 377 s.
- Petr Hliněný, Teorie grafů, studijní materiály, http://www.fi.muni.cz/~hlineny/Vyuka/GT/
- Rensselaer Polytechnic Institute – Graph Theory Applet (`http://links.math.rpi.edu/applets/appindex/graphtheory.html`).
- Donald E. Knuth, The Stanford GraphBase, ACM, New York, 1993 (`http://www-cs-faculty.stanford.edu/~knuth/sgb.html`).

Plán přednášky

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy.

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,
- uzlem, ve kterém se zrovna nacházíme

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,
- uzlem, ve kterém se zrovna nacházíme
- a hranou, kterou jsme do uzlu vstoupili.

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,
- uzlem, ve kterém se zrovna nacházíme
- a hranou, kterou jsme do uzlu vstoupili.

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,
- uzlem, ve kterém se zrovna nacházíme
- a hranou, kterou jsme do uzlu vstoupili.

Při zpracování informace se zároveň rozhodujeme, kterými výstupními hranami budeme pokračovat a v jakém pořadí.

Grafy jsou jazykem, ve kterém často formulujeme algoritmy. Rozumíme tím postup, kdy v nějakém orientovaném grafu přecházíme z uzlu do uzlu podél hran a přitom zpracováváme informace, které jsou určeny a ovlivněny:

- výsledkem předchozích operací,
- uzlem, ve kterém se zrovna nacházíme
- a hranou, kterou jsme do uzlu vstoupili.

Při zpracování informace se zároveň rozhodujeme, kterými výstupními hranami budeme pokračovat a v jakém pořadí. Pokud je graf neorientovaný, můžeme všechny hrany považovat za dvojice hran orientované opačnými směry.

Abychom mohli algoritmy realizovat pomocí počítače, je třeba umět uvažovaný graf efektivně zadat. Uvedeme dva příklady:

Abychom mohli algoritmy realizovat pomocí počítače, je třeba umět uvažovaný graf efektivně zadat. Uvedeme dva příklady:

Definice (Hranový seznam/Edge List)

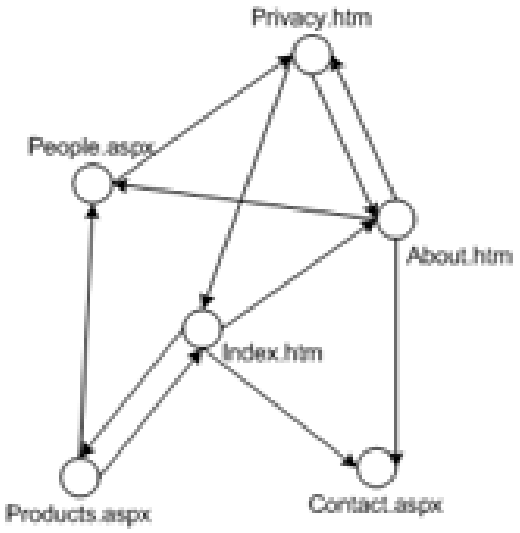
Graf $G = (V, E)$ si v něm reprezentujeme jako dva seznamy V a E propojené ukazateli tak, že každý vrchol ukazuje na všechny z něj vycházející hrany (případně také na všechny do něj vcházející hrany u orientovaných grafů) a každá hrana ukazuje na svůj počáteční a koncový vrchol.

Abychom mohli algoritmy realizovat pomocí počítače, je třeba umět uvažovaný graf efektivně zadat. Uvedeme dva příklady:

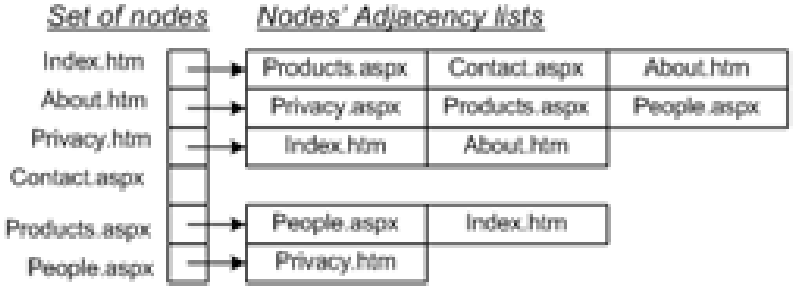
Definice (Hranový seznam/Edge List)

Graf $G = (V, E)$ si v něm reprezentujeme jako dva seznamy V a E propojené ukazateli tak, že každý vrchol ukazuje na všechny z něj vycházející hrany (případně také na všechny do něj vcházející hrany u orientovaných grafů) a každá hrana ukazuje na svůj počáteční a koncový vrchol.

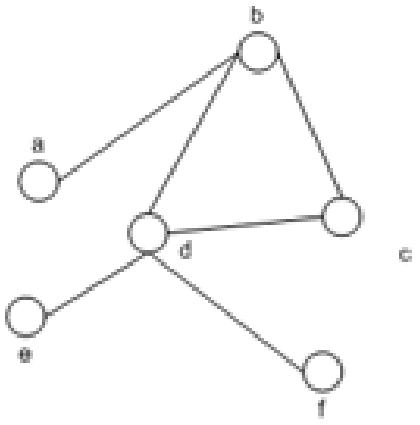
Je vidět, že pamět potřebná na uchování grafu je v tomto případě $O(|V| + |E|)$, protože na každou hranu ukazujeme právě dvakrát a na každý vrchol ukazujeme tolikrát, kolik je jeho stupeň a součet stupňů je také roven dvojnásobku počtu hran. Až na konstantní násobek jde tedy stále o optimální způsob uchovávání grafu v paměti.



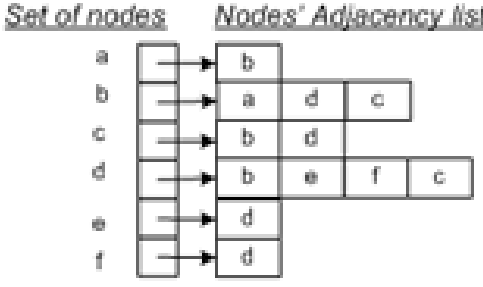
Directed Graph (a)



Adjacency List Representation (a)



Undirected Graph (b)



Adjacency List Representation (b)

Definice (Matice sousednosti grafu)

Uvažme (neorientovaný) graf $G = (V, E)$, zvolme uspořádání jeho vrcholů $V = (v_1, \ldots, v_n)$ a definujme matici $A_G = (a_{ij})$ nad $\mathbb{Z}_2$ (tj. zaplněnou jen nulami a jedničkami) takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je hrana } e_{ij} = \{v_i, v_j\} \text{ v } E \\ 0 & \text{jestliže není hrana } e_{ij} = \{v_i, v_j\} \text{ v } E \end{cases}$$

Matici A_G nazýváme matice sousednosti grafu G.

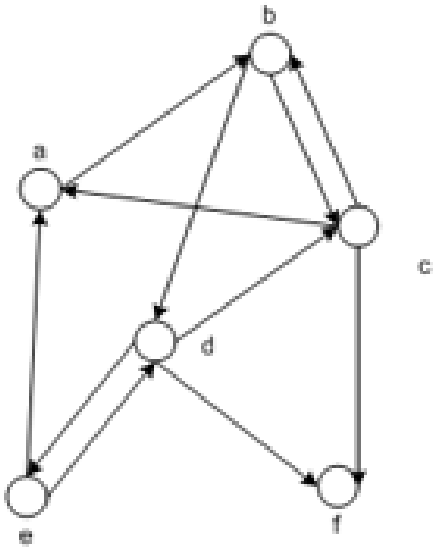
Definice (Matice sousednosti grafu)

Uvažme (neorientovaný) graf $G = (V, E)$, zvolme uspořádání jeho vrcholů $V = (v_1, \ldots, v_n)$ a definujme matici $A_G = (a_{ij})$ nad $\mathbb{Z}_2$ (tj. zaplněnou jen nulami a jedničkami) takto:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jestliže je hrana } e_{ij} = \{v_i, v_j\} \text{ v } E \\ 0 & \text{jestliže není hrana } e_{ij} = \{v_i, v_j\} \text{ v } E \end{cases}$$

Matici A_G nazýváme matice sousednosti grafu G.

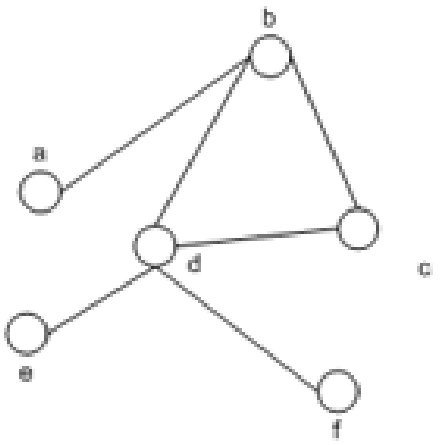
Zadání grafu pomocí matice sousednosti potřebuje vždy $O(n^2)$ místa v paměti. Pokud je ale v grafu málo hran, dostáváme tzv. řídkou matici se skoro všemi prvky nulovými. Takové lze naopak reprezentovat pomocí „hranových seznamů“ odpovídajících grafů a to i včetně obecných číselných hodnot pro jednotlivé hrany. Příklad pro procvičení – násobení matic pomocí reprezentace hranovým seznamem.



Directed Graph (a)

	a	b	c	d	e	f
a		✓				
b			✓	✓		
c		✓				✓
d			✓		✓	✓
e	✓			✓		
f						

Adjacency Matrix Representation (a)



Undirected Graph (b)

	a	b	c	d	e	f
a		✓				
b	✓		✓	✓		
c		✓		✓		
d		✓	✓		✓	✓
e				✓		
f				✓		

Adjacency Matrix Representation (b)

Definice (Základní operace nad grafem)

- *odebrání hrany*
- *přidání hrany*
- *přidání vrcholu*
- *odebrání vrcholu*
- *dělení hrany nově přidaným vrcholem*

Jak se projeví tyto operace v našich reprezentacích?

Jednoduchou aplikací maticového počtu je tvrzení:

Věta

Nechť $G = (V, E)$ je graf s uspořádanými vrcholy $V = (v_1, \ldots, v_n)$ a maticí sousednosti A_G. Označme $A_G^k = (a_{ij}^{(k)})$ prvky k-té mocniny matice A_G. Pak $a_{ij}^{(k)}$ je počet sledů délky k mezi vrcholy v_i a v_j.

Důkaz.

Indukcí. □

Jednoduchou aplikací maticového počtu je tvrzení:

Věta

Nechť $G = (V, E)$ je graf s uspořádanými vrcholy $V = (v_1, \ldots, v_n)$ a maticí sousednosti A_G. Označme $A_G^k = (a_{ij}^{(k)})$ prvky k-té mocniny matice A_G. Pak $a_{ij}^{(k)}$ je počet sledů délky k mezi vrcholy v_i a v_j.

Důkaz.

Indukcí. □

Důsledek

Jsou-li $G = (V, E)$ a A_G jako v předchozí větě, pak lze všechny dvojice vrcholů G spojit cestou právě tehdy, když má matice $(A + \mathbb{I}_n)^{n-1}$ samé nenulové členy (zde $\mathbb{I}_n$ označuje jednotkovou matici s n řádky a sloupci).

Plán přednášky

Prohledávání v grafech

Algoritmy bývají založeny na postupném prohledávání všech vrcholů v grafu. Zpravidla máme zadaný počáteční vrchol nebo si jej na začátku procesu zvolíme. V průběhu procesu pak v každém okamžiku jsou vrcholy

- *již zpracované*, tj. ty, kterými jsme již při běhu algoritmu prošli a definitivně je zpracovali;
- *aktivní*, tj. ty vrcholy, které jsou detekovány a připraveny pro zpracování;
- *spící*, tj. ty vrcholy, na které teprve dojde.

Prohledávání v grafech

Algoritmy bývají založeny na postupném prohledávání všech vrcholů v grafu. Zpravidla máme zadaný počáteční vrchol nebo si jej na začátku procesu zvolíme. V průběhu procesu pak v každém okamžiku jsou vrcholy

- *již zpracované*, tj. ty, kterými jsme již při běhu algoritmu prošli a definitivně je zpracovali;
- *aktivní*, tj. ty vrcholy, které jsou detekovány a připraveny pro zpracování;
- *spící*, tj. ty vrcholy, na které teprve dojde.

Zároveň si udržujeme přehled o již zpracovaných hranách.
V každém okamžiku musí být množiny vrcholů a/nebo hran v těchto skupinách disjunktním rozdělením množin vrcholů V a množin E hran grafu G a některý z aktivních vrcholů je aktuálně zpracováván.

Základní postup:

- Na počátku máme jeden aktivní vrchol a všechny ostaní vrcholy jsou spící.

Základní postup:

- Na počátku máme jeden aktivní vrchol a všechny ostaní vrcholy jsou spící.
- V prvním kroku projdeme všechny hrany vycházející z aktivního vrcholu a jejich příslušným koncovým vrcholům, které jsou spící, změníme stav na aktivní.

Základní postup:

- Na počátku máme jeden aktivní vrchol a všechny ostaní vrcholy jsou spící.
- V prvním kroku projdeme všechny hrany vycházející z aktivního vrcholu a jejich příslušným koncovým vrcholům, které jsou spící, změníme stav na aktivní.
- V dalších krocích vždy u zpracovávaného vrcholu probíráme ty z něho vycházející hrany, které dosud nebyly probrány a jejich koncové vrcholy přidáváme mezi aktivní. Tento postup aplikujeme stejně u orientovaných i neorientovaných grafů, jen se drobně mění význam adjektiv koncový a počáteční u vrcholů.

Základní postup:

- Na počátku máme jeden aktivní vrchol a všechny ostaní vrcholy jsou spící.
- V prvním kroku projdeme všechny hrany vycházející z aktivního vrcholu a jejich příslušným koncovým vrcholům, které jsou spící, změníme stav na aktivní.
- V dalších krocích vždy u zpracovávaného vrcholu probíráme ty z něho vycházející hrany, které dosud nebyly probrány a jejich koncové vrcholy přidáváme mezi aktivní. Tento postup aplikujeme stejně u orientovaných i neorientovaných grafů, jen se drobně mění význam adjektiv koncový a počáteční u vrcholů.

V konkrétních úlohách se můžeme omezovat na některé z hran, které vychází z aktuálního vrcholu. Na principu to ale nic podstatného nemění.

Pro realizaci algoritmů je nutné se rozhodnout, v jakém pořadí zpracováváme aktivní vrcholy a v jakém pořadí zpracováváme hrany z nich vycházející. V zásadě přichází v úvahu dvě možnosti zpracovávání vrcholů:

1. vrcholy vybíráme pro další zpracování ve stejném pořadí, jak se stávaly aktivními (fronta – FIFO)
2. dalším vrcholem vybraným pro zpracování je poslední zaktivněný vrchol (zásobník – LIFO).

V prvním případě hovoříme o **prohledávání do šířky**, ve druhém o **prohledávání do hloubky**.

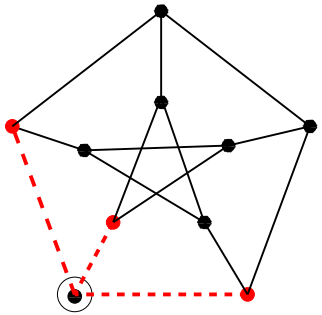
Na první pohled je zřejmá role volby vhodných datových struktur pro uchovávání údajů o grafu. Hranový seznam umožňuje projít všechny hrany vycházející z právě zpracovávaného vrcholu v čase lineárně úměrném jejich počtu. Každou hranu přitom diskutujeme nejvýše dvakrát, protože má právě dva konce. Zjevně tedy platí:

Na první pohled je zřejmá role volby vhodných datových struktur pro uchovávání údajů o grafu. Hranový seznam umožňuje projít všechny hrany vycházející z právě zpracovávaného vrcholu v čase lineárně úměrném jejich počtu. Každou hranu přitom diskutujeme nejvýše dvakrát, protože má právě dva konce. Zjevně tedy platí:

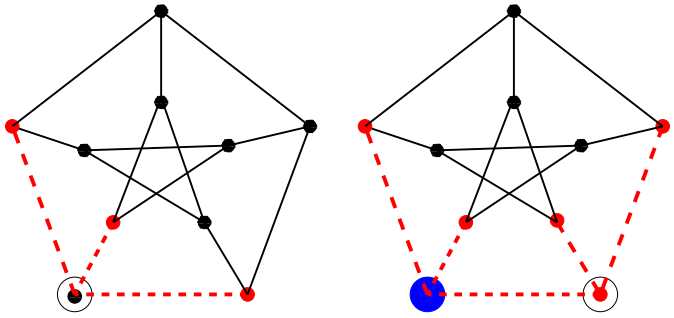
Věta

Celkový čas realizace vyhledávání do šířky i do hloubky je $O((n+m)*K)$, kde n je počet vrcholů v grafu, m je počet hran v grafu a K je čas potřebný na zpracování jedné hrany, resp. jednoho vrcholu.

Ilustrace prohledávání do šířky:

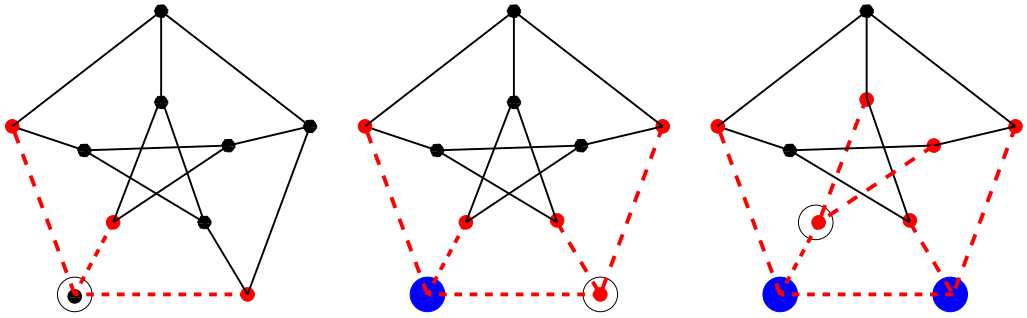


Ilustrace prohledávání do šířky:



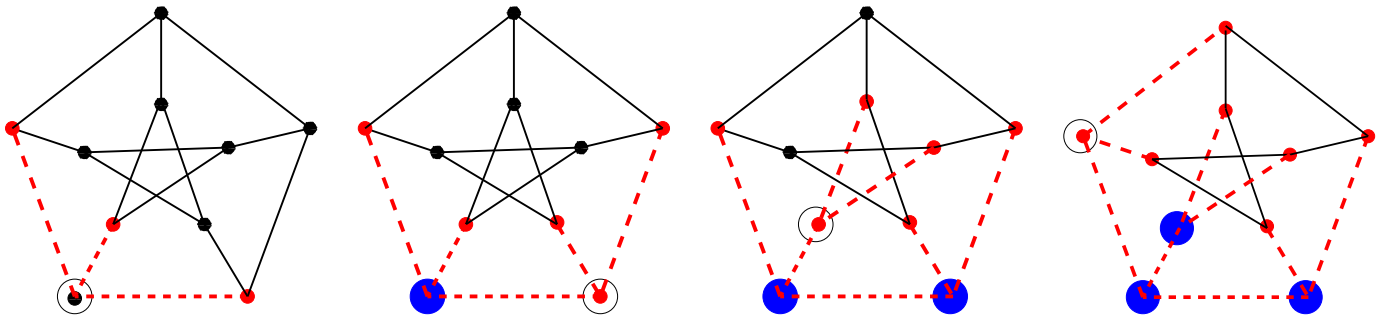
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:



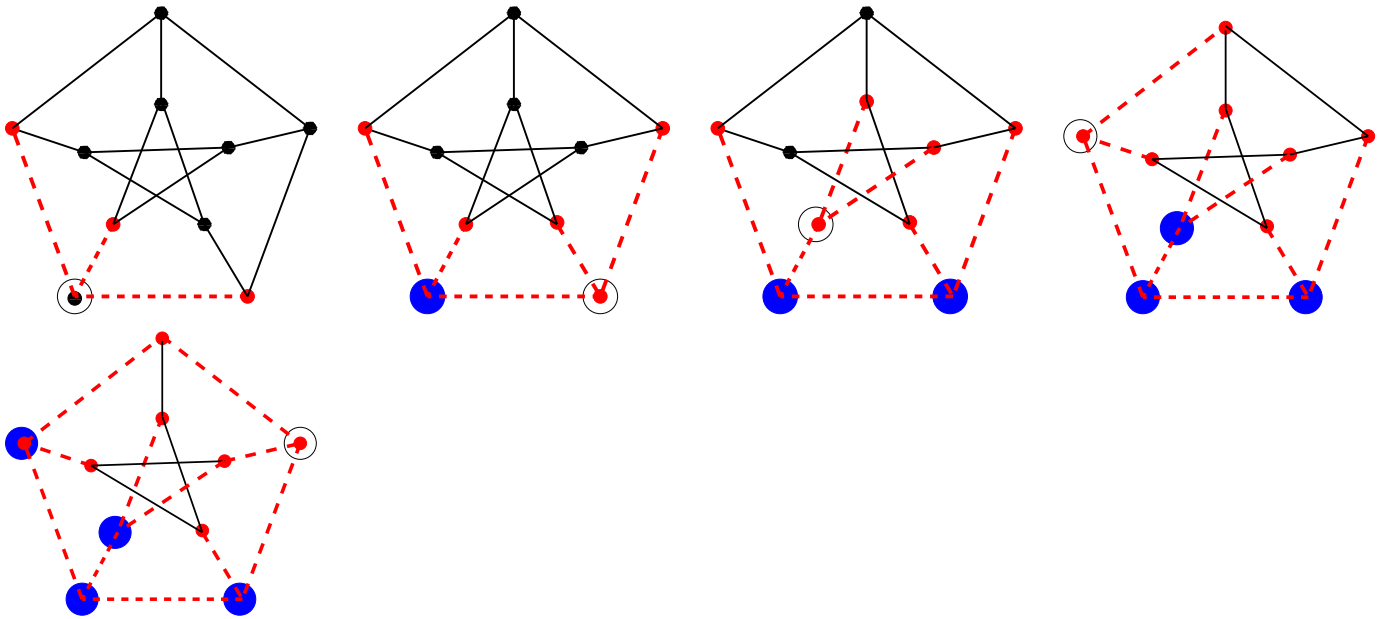
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:



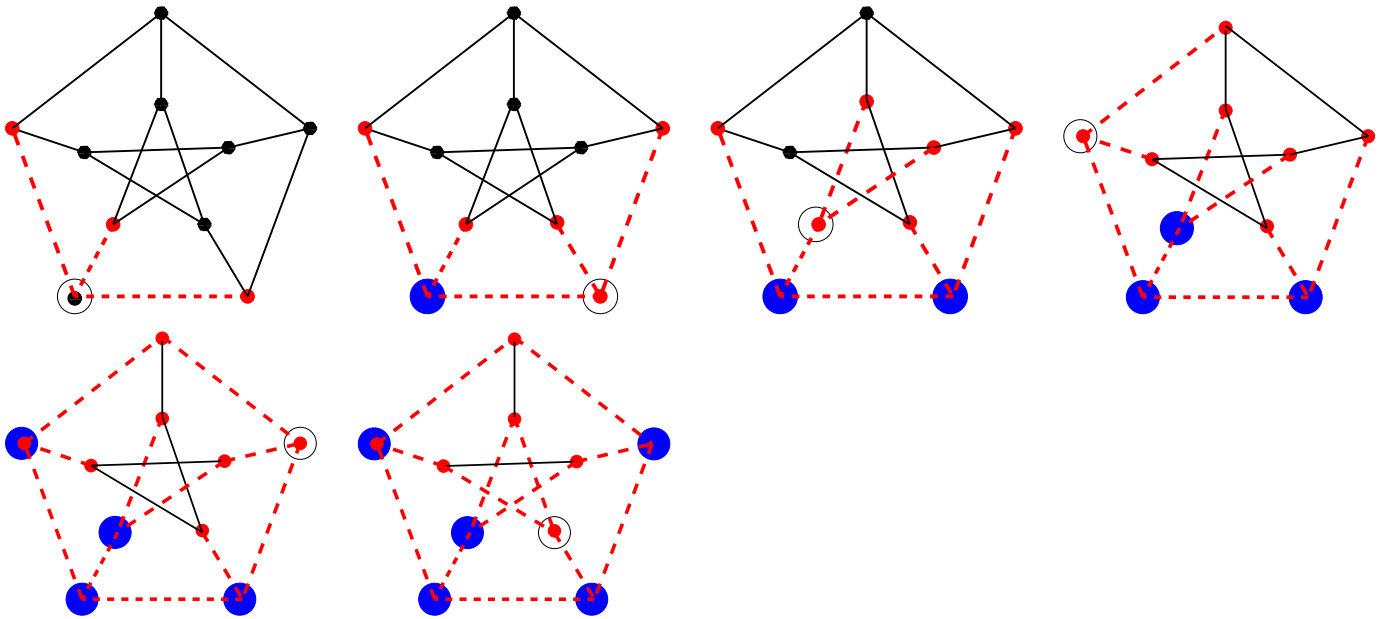
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:



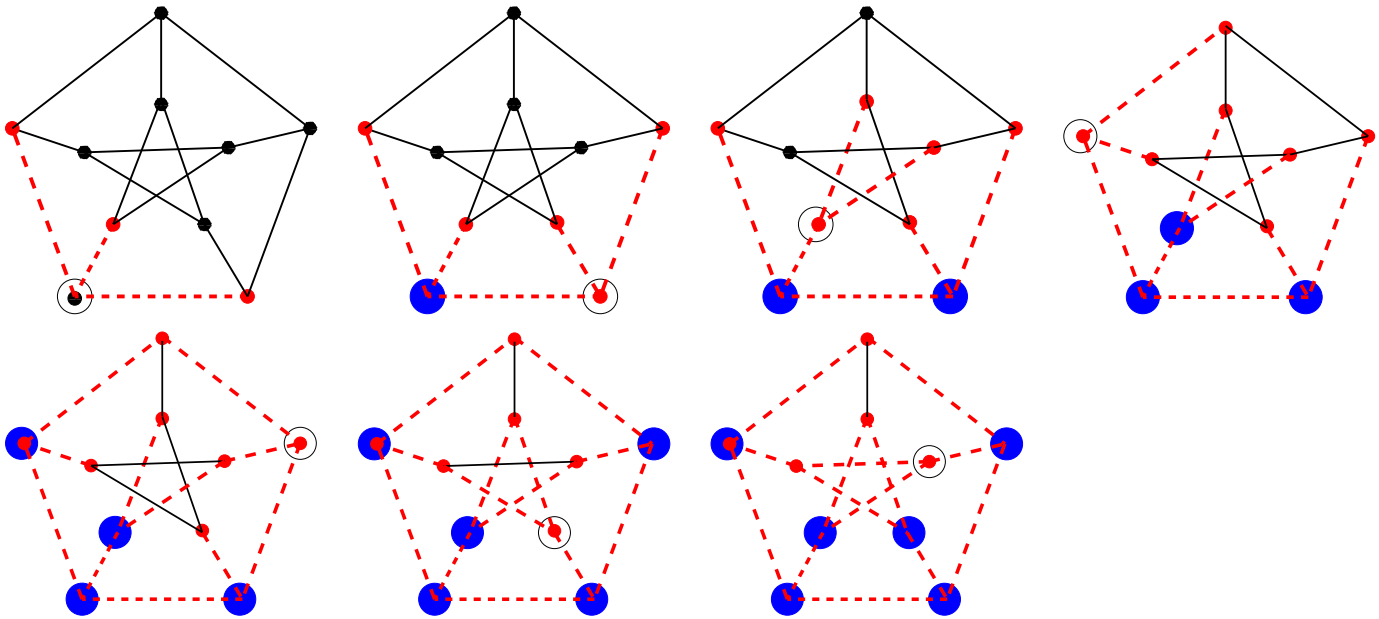
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:



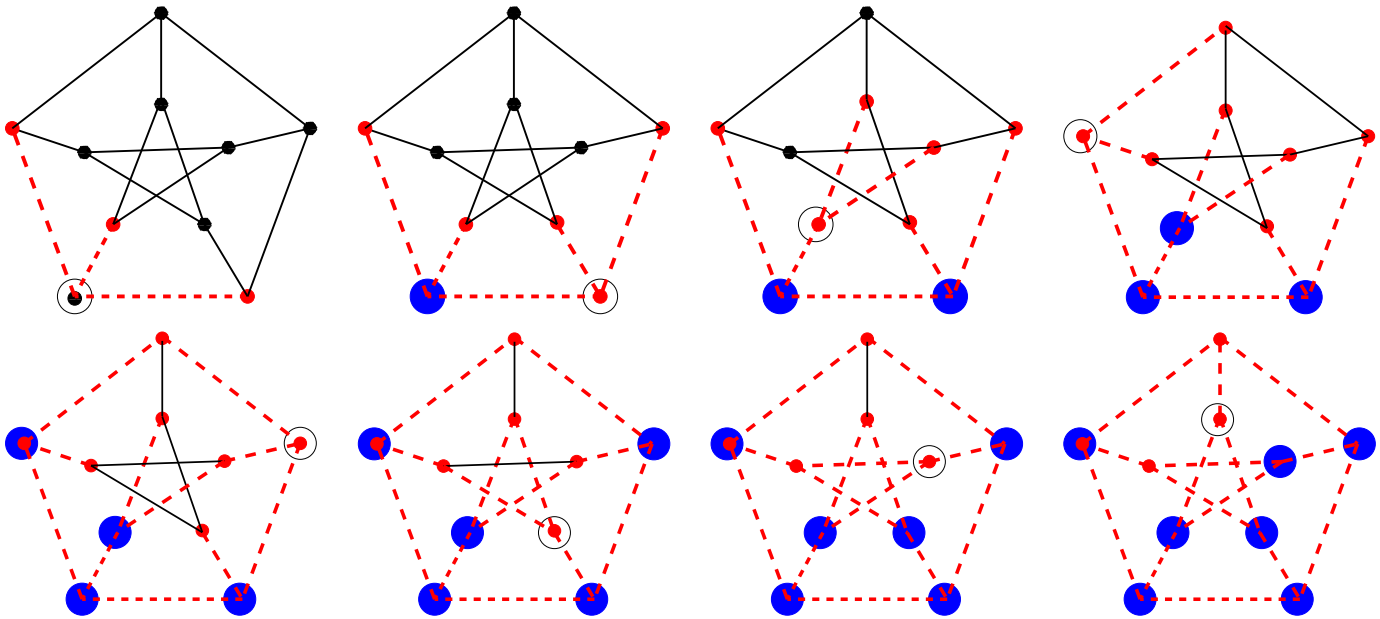
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:



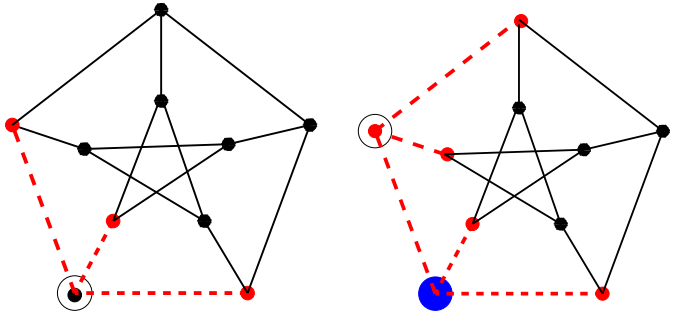
Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

Ilustrace prohledávání do šířky:

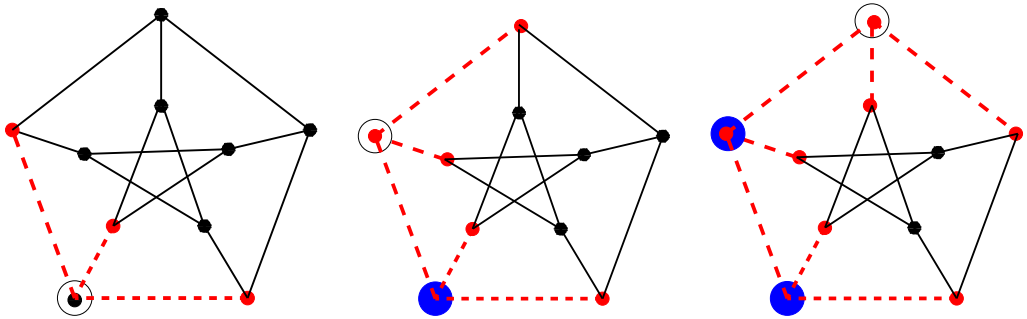


Zakroužkovaný vrchol je ten právě zpracovávaný, modré velké puntíky jsou již zpracované uzly, čárkované červené hrany jsou již zpracované a červené drobné uzly jsou ty aktivní (poznají se také podle toho, že do nich již vede některá zpracovaná hrana). Hrany zpracováváme v pořadí orientace proti hodinovým ručkám, přičemž za „první“ bereme směr „kolmo dolů“.

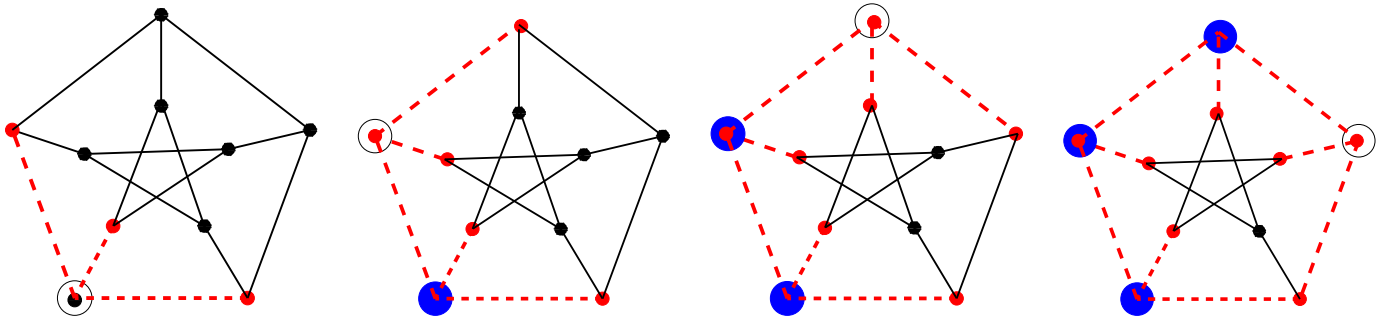
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



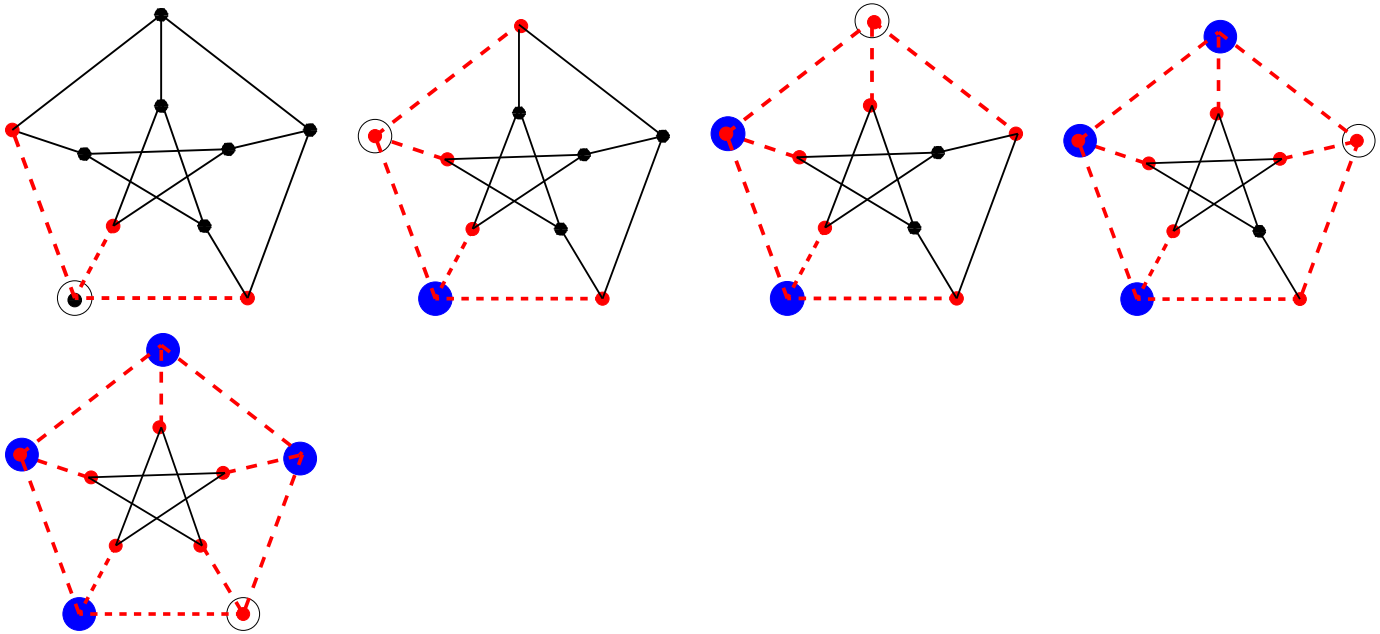
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



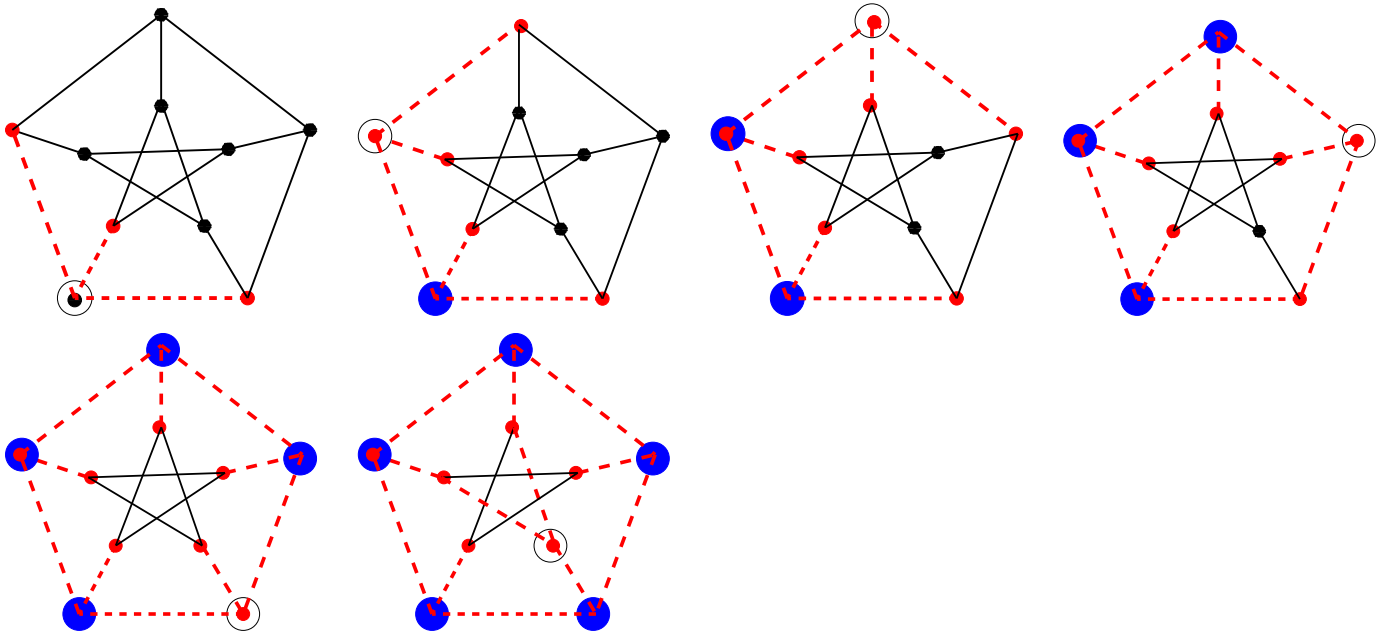
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



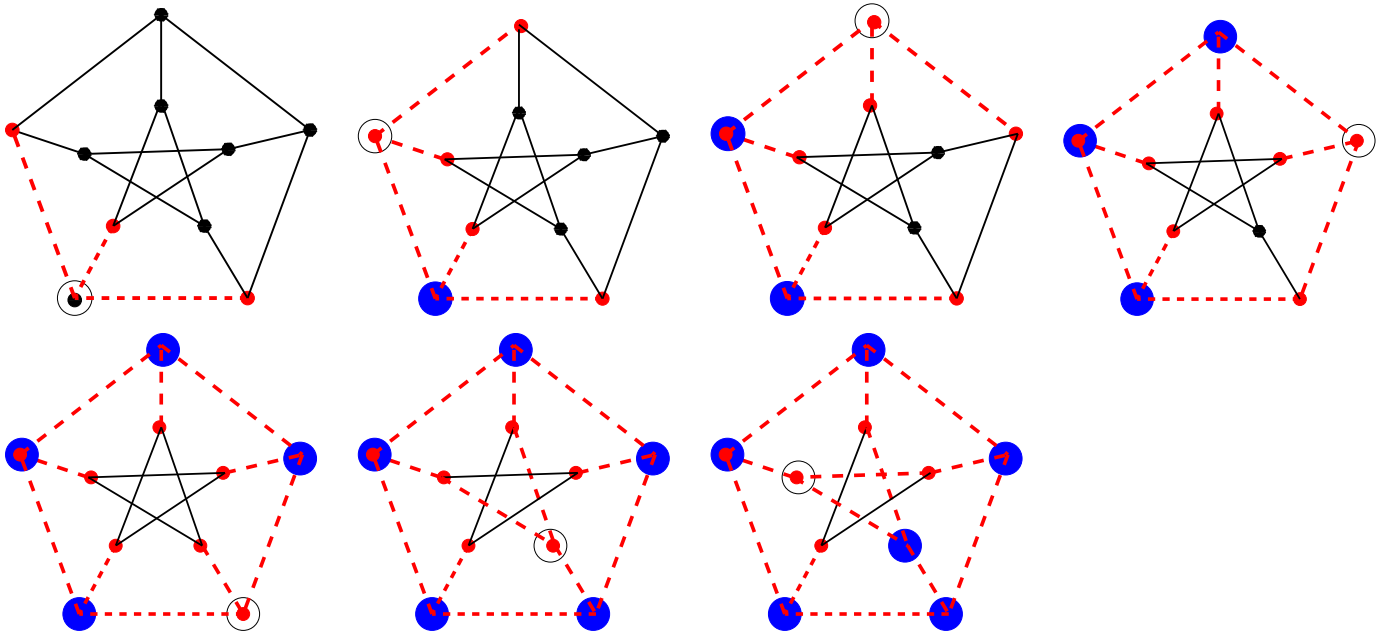
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



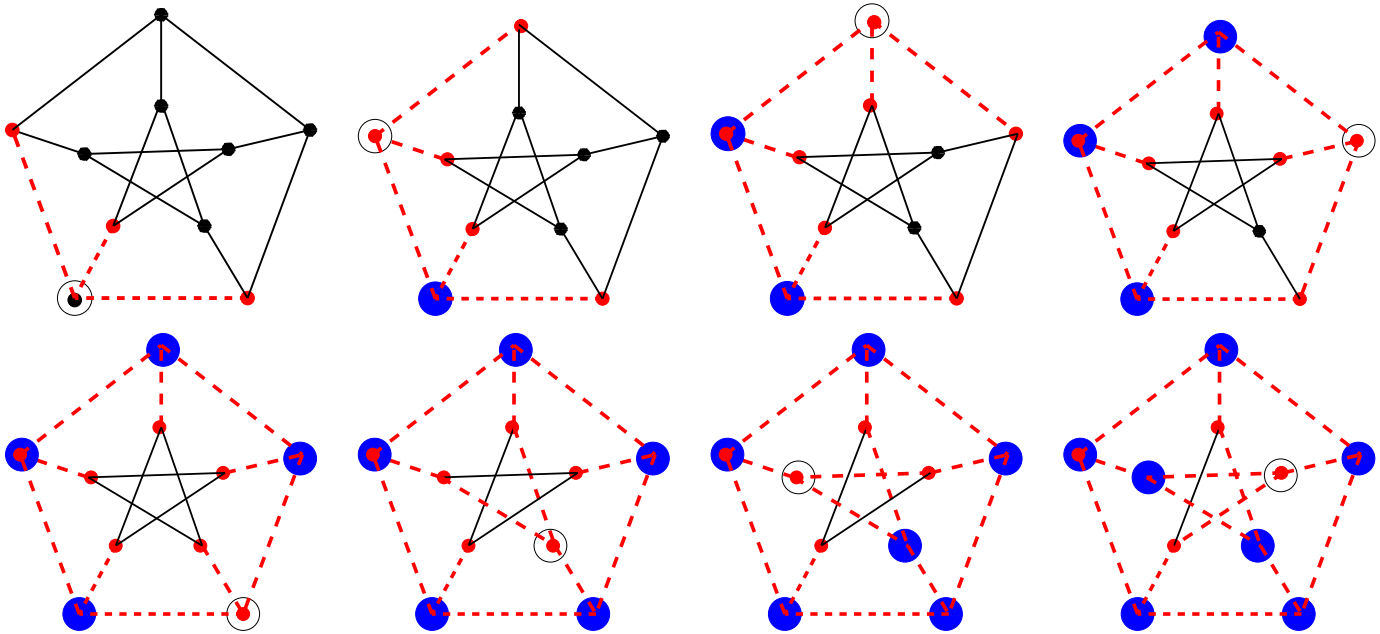
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



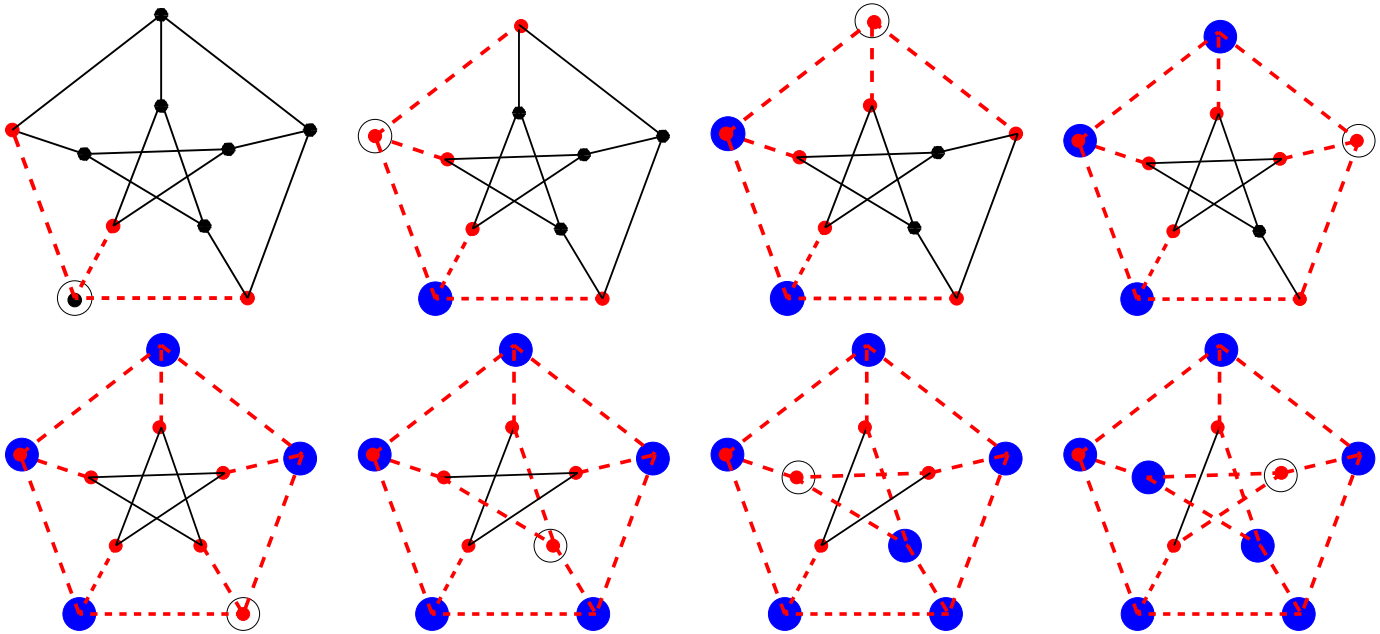
Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



Totéž postupem „do hloubky“. Všimněte si, že první krok je stejný jako v předchozím případě.



Prohledávání "do hloubky"odpovídá interpretaci rekurze v běžných imperativních jazycích (např. i v Maplu) – v těchto případech je ale *stavový graf* potenciálně nekonečný a prohledávání do hloubky tak samozřejmě nemusí nalézt všechny vrcholy dostupné z daného vrcholu po cestách konečné délky (narozdíl od prohledávání do šířky).

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru
- při východu z místnosti preferujeme neoznačenou chodbu

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru
- při východu z místnosti preferujeme neoznačenou chodbu
- navštívenou místnost označíme, pokud je již označená, tak se ihned vrátíme stejnou chodbou zpět

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru
- při východu z místnosti preferujeme neoznačenou chodbu
- navštívenou místnost označíme, pokud je již označená, tak se ihned vrátíme stejnou chodbou zpět
- z dosud nenavštívené místnosti postupujeme dále

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru
- při východu z místnosti preferujeme neoznačenou chodbu
- navštívenou místnost označíme, pokud je již označená, tak se ihned vrátíme stejnou chodbou zpět
- z dosud nenavštívené místnosti postupujeme dále
- jsou-li již všechny chodby vedoucí z místnosti použity, vracíme se zpět chodbou, která je označena jen jednou čarou

Prohledávání bludiště

Průchod bludištěm (s křídou) prostřednictvím prohledávání do hloubky v neorientovaném grafu – úkolem je najít východ nebo dokázat, že neexistuje:

- každou chodbu při prvním průchodu označíme čarou, při návratu přidáme druhou čáru
- při východu z místnosti preferujeme neoznačenou chodbu
- navštívenou místnost označíme, pokud je již označená, tak se ihned vrátíme stejnou chodbou zpět
- z dosud nenavštívené místnosti postupujeme dále
- jsou-li již všechny chodby vedoucí z místnosti použity, vracíme se zpět chodbou, která je označena jen jednou čarou
- pokud z dané místnosti vedou pouze chodby, které jsou označeny 2 čarami, hledání ukončíme (nutně jde o výchozí místnost, východ neexistuje a můžeme s klidem umřít).

Souvislé komponenty grafu

Definice

Nechť je $G = (V, E)$ neorientovaný graf. Na množině vrcholů grafu G zavedeme relaci $\sim$ tak, že $v \sim w$ právě když existuje cesta z v do w. Promyslete si, že tato relace je dobře definovaná a že se jedná o ekvivalenci. Každá třída $[v]$ této ekvivalence definuje indukovaný podgraf $G_{[v]} \subset G$ a disjunktní sjednocení těchto podgrafů je ve skutečnosti původní graf G. Podgrafům $G_{[v]}$ říkáme **souvislé komponenty grafu** G.

Souvislé komponenty grafu

Definice

Nechť je $G = (V, E)$ neorientovaný graf. Na množině vrcholů grafu G zavedeme relaci $\sim$ tak, že $v \sim w$ právě když existuje cesta z v do w. Promyslete si, že tato relace je dobře definovaná a že se jedná o ekvivalenci. Každá třída $[v]$ této ekvivalence definuje indukovaný podgraf $G_{[v]} \subset G$ a disjunktní sjednocení těchto podgrafů je ve skutečnosti původní graf G. Podgrafům $G_{[v]}$ říkáme **souvislé komponenty grafu** G.

Pro orientované grafy postupujeme stejně, pouze u $\sim$ požadujeme aby existovala neorientovaná cesta z uzlu v do uzlu w (tj. můžeme "jít i proti směru šipek").

Souvislé komponenty grafu

Definice

Nechť je $G = (V, E)$ neorientovaný graf. Na množině vrcholů grafu G zavedeme relaci $\sim$ tak, že $v \sim w$ právě když existuje cesta z v do w. Promyslete si, že tato relace je dobře definovaná a že se jedná o ekvivalenci. Každá třída $[v]$ této ekvivalence definuje indukovaný podgraf $G_{[v]} \subset G$ a disjunktní sjednocení těchto podgrafů je ve skutečnosti původní graf G. Podgrafům $G_{[v]}$ říkáme **souvislé komponenty grafu** G.

Pro orientované grafy postupujeme stejně, pouze u $\sim$ požadujeme aby existovala neorientovaná cesta z uzlu v do uzlu w (tj. můžeme "jít i proti směru šipek").

Jinými slovy: Každý graf $G = (V, E)$ se přirozeně rozpadá na disjunktní podgrafy G_i takové, že vrcholy $v \in G_i$ a $w \in G_j$ jsou spojeny nějakou cestou právě, když $i = j$. To jsou právě souvislé komponenty grafu G.

Pro hledání všech souvislých komponent v grafu lze užít prohledávání — dodatečnou informací, kterou musíme zpracovávat je, kterou komponentu aktuálně procházíme.

Pro hledání všech souvislých komponent v grafu lze užít prohledávání — dodatečnou informací, kterou musíme zpracovávat je, kterou komponentu aktuálně procházíme.

Definice

Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je

- **souvislý**, jestliže má právě jednu souvislou komponentu;
- **vrcholově k–souvislý**, jestliže má alespoň $k + 1$ vrcholů a bude souvislý po odebrání libovolné podmnožiny $k - 1$ vrcholů;
- **hranově k–souvislý**, jestliže bude souvislý po odebrání libovolné podmnožiny $k - 1$ hran.

Hranu, jejímž odebráním se zvýší počet souvislých komponent grafu G, nazýváme *mostem*.

Pro hledání všech souvislých komponent v grafu lze užít prohledávání — dodatečnou informací, kterou musíme zpracovávat je, kterou komponentu aktuálně procházíme.

Definice

Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je

- **souvislý**, jestliže má právě jednu souvislou komponentu;
- **vrcholově k–souvislý**, jestliže má alespoň $k + 1$ vrcholů a bude souvislý po odebrání libovolné podmnožiny $k - 1$ vrcholů;
- **hranově k–souvislý**, jestliže bude souvislý po odebrání libovolné podmnožiny $k - 1$ hran.

Hranu, jejímž odebráním se zvýší počet souvislých komponent grafu G, nazýváme *mostem*.

Silnější souvislost grafu je žádoucí např. u síťových aplikací, kdy požadujeme značnou redundanci poskytovaných služeb v případě výpadku některých linek (tj. hran) nebo uzlů (tj. vrcholů).

Speciální případ: 2–souvislý graf je takový souvislý graf o alespoň třech vrcholech, kdy vynecháním libovolného vrcholu nenarušíme jeho souvislost.

Věta

Pro graf $G = (V, E)$ s alespoň třemi vrcholy jsou následující podmínky ekvivalentní:

- *G je (vrcholově) 2–souvislý;*
- *každé dva vrcholy v a w grafu G leží na společné kružnici;*
- *graf G je možné vytvořit z trojúhelníku K_3 pomocí postupných dělení hran.*

Speciální případ: 2–souvislý graf je takový souvislý graf o alespoň třech vrcholech, kdy vynecháním libovolného vrcholu nenarušíme jeho souvislost.

Věta

Pro graf $G = (V, E)$ s alespoň třemi vrcholy jsou následující podmínky ekvivalentní:

- *G je (vrcholově) 2–souvislý;*
- *každé dva vrcholy v a w grafu G leží na společné kružnici;*
- *graf G je možné vytvořit z trojúhelníku K_3 pomocí postupných dělení hran.*

Obecnější je tzv. **Mengerova věta** (obd. „vrcholová verze“):

Věta

Pro každé dva vrcholy v a w v grafu $G = (V, E)$ je počet hranově různých cest z v do w roven minimálnímu počtu hran, které je třeba odstranit, aby se v a w ocitly v různých komponentách vzniklého grafu.

Silně souvislé komponenty

Definice

Nechť je $G = (V, E)$ orientovaný graf. Na množině vrcholů grafu G zavedeme relaci $\approx$ tak, že $v \approx w$ právě když existuje orientovaná cesta z v do w i orientovaná cesta z w do v. Zřejmě se opět jedná o ekvivalenci. Každá třída $[v]$ této ekvivalence definuje indukovaný podgraf $G_{[v]} \subset G$ a disjunktní sjednocení těchto podgrafů je ve skutečnosti původní graf G. Podgrafům $G_{[v]}$ říkáme **silně souvislé komponenty grafu** G.

Silně souvislé komponenty

Definice

Nechť je $G = (V, E)$ orientovaný graf. Na množině vrcholů grafu G zavedeme relaci $\approx$ tak, že $v \approx w$ právě když existuje orientovaná cesta z v do w i orientovaná cesta z w do v. Zřejmě se opět jedná o ekvivalenci. Každá třída $[v]$ této ekvivalence definuje indukovaný podgraf $G_{[v]} \subset G$ a disjunktní sjednocení těchto podgrafů je ve skutečnosti původní graf G. Podgrafům $G_{[v]}$ říkáme **silně souvislé komponenty grafu** G.

Příklad

Viz `https://is.muni.cz/auth/el/1433/podzim2009/MB103/um/Tarjan_pr.pdf`

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.
2. Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.
2. Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.
3. Pokud existuje hrana do již navštíveného vrcholu, nahraď pomocné číslo stávajícího vrcholu **pořadovým** číslem vrcholu, do nějž směřuje hrana (pouze, je-li menší).

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.
2. Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.
3. Pokud existuje hrana do již navštíveného vrcholu, nahraď pomocné číslo stávajícího vrcholu **pořadovým** číslem vrcholu, do nějž směřuje hrana (pouze, je-li menší).
4. Pokud neexistuje nepoužitá hrana a obě čísla u daného vrcholu jsou stejná, je tento vrchol prvním navštíveným vrcholem své silně souvislé komponenty. Ze zásobníku odeberme všechny vrcholy až po nynější vrchol. Vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo **pomocným** číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.
2. Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.
3. Pokud existuje hrana do již navštíveného vrcholu, nahraď pomocné číslo stávajícího vrcholu **pořadovým** číslem vrcholu, do nějž směřuje hrana (pouze, je-li menší).
4. Pokud neexistuje nepoužitá hrana a obě čísla u daného vrcholu jsou stejná, je tento vrchol prvním navštíveným vrcholem své silně souvislé komponenty. Ze zásobníku odeberme všechny vrcholy až po nynější vrchol. Vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo **pomocným** číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).
5. Pokud neexistuje nepoužitá hrana a čísla u daného vrcholu jsou různá, vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo **pomocným** číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).

Tarjanův algoritmus

1. Každý vrchol označujeme dvojicí čísel, z nichž první určuje pořadí příchodu a druhý pomocné číslo, které se v průběhu aktualizuje a rozhoduje o příslušnosti ke komponentě (zároveň máme u každého vrcholu odkaz na jeho předchůdce). Při prvním příchodu do vrcholu ho označíme dvojicí `pořadí, pořadí` a vložíme do zásobníku.
2. Pokud existuje hrana do dosud nenavštíveného vrcholu, jdi do něj.
3. Pokud existuje hrana do již navštíveného vrcholu, nahraď pomocné číslo stávajícího vrcholu **pořadovým** číslem vrcholu, do nějž směřuje hrana (pouze, je-li menší).
4. Pokud neexistuje nepoužitá hrana a obě čísla u daného vrcholu jsou stejná, je tento vrchol prvním navštíveným vrcholem své silně souvislé komponenty. Ze zásobníku odeberme všechny vrcholy až po nynější vrchol. Vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo **pomocným** číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).
5. Pokud neexistuje nepoužitá hrana a čísla u daného vrcholu jsou různá, vrať se do předchůdce a aktualizuj jeho pomocné číslo **pomocným** číslem vrcholu, z nějž se vracíme (je-li menší).
6. Nejsou-li ještě vyčerpány všechny vrcholy a z právě zpracovaného vrcholu již není kam se vrátit, zvol jiný vrchol a pokračuj v algoritmu.

Pamatujme si zejména:

- Při snaze jít do již navštíveného vrcholu, aktualizujeme jeho **pořadovým číslem**.

Poznámka

Základ algoritmu tkví v tom, že **pomocné číslo** každého vrcholu je **pořadovým číslem** vrcholu z téže souvislé komponenty. Pokud je pomocné číslo menší než pořadové (museli jsme se někdy pokusit jít po hraně do již navštíveného vrcholu – tedy uzavřít orientovanou smyčku), pak vrchol do něhož se vracíme bude ve stejně silně souvislé komponentě jako aktuální vrchol.

Pamatujme si zejména:

- Při snaze jít do již navštíveného vrcholu, aktualizujeme jeho **pořadovým číslem**.
- Při návratu k předchůdci aktualizujeme vždy pomocným číslem.

Poznámka

Základ algoritmu tkví v tom, že **pomocné číslo** každého vrcholu je **pořadovým číslem** vrcholu z téže souvislé komponenty. Pokud je pomocné číslo menší než pořadové (museli jsme se někdy pokusit jít po hraně do již navštíveného vrcholu – tedy uzavřít orientovanou smyčku), pak vrchol do něhož se vracíme bude ve stejně silně souvislé komponentě jako aktuální vrchol.

Pamatujme si zejména:

- Při snaze jít do již navštíveného vrcholu, aktualizujeme jeho **pořadovým číslem**.
- Při návratu k předchůdci aktualizujeme vždy pomocným číslem.
- Ve chvíli, kdy už z daného vrcholu nevede nepoužitá hrana a obě čísla jsou stejná, uzavíráme komponentu a to tak, že odebíráme všechny vrcholy za zásobníku, doku nenarazíme na současný (ekvivalentně: v komponentě leží všechny vrcholy s pomocným číslem $\geq$ číslu aktuálního vrcholu).

Poznámka

Základ algoritmu tkví v tom, že **pomocné číslo** každého vrcholu je **pořadovým číslem** vrcholu z téže souvislé komponenty. Pokud je pomocné číslo menší než pořadové (museli jsme se někdy pokusit jít po hraně do již navštíveného vrcholu – tedy uzavřít orientovanou smyčku), pak vrchol do něhož se vracíme bude ve stejně silně souvislé komponentě jako aktuální vrchol.

Pamatujme si zejména:

- Při snaze jít do již navštíveného vrcholu, aktualizujeme jeho **pořadovým číslem**.
- Při návratu k předchůdci aktualizujeme vždy pomocným číslem.
- Ve chvíli, kdy už z daného vrcholu nevede nepoužitá hrana a obě čísla jsou stejná, uzavíráme komponentu a to tak, že odebíráme všechny vrcholy za zásobníku, doku nenarazíme na současný (ekvivalentně: v komponentě leží všechny vrcholy s pomocným číslem $\geq$ číslu aktuálního vrcholu).
- Je vhodné si kreslit graf průchodu (postup do hloubky znázorníme např. kreslením doprava či dolů), aby bylo jasné, kterými hranami se vracíme.

Poznámka

Základ algoritmu tkví v tom, že **pomocné číslo** každého vrcholu je **pořadovým číslem** vrcholu z téže souvislé komponenty. Pokud je pomocné číslo menší než pořadové (museli jsme se někdy pokusit jít po hraně do již navštíveného vrcholu – tedy uzavřít orientovanou smyčku), pak vrchol do něhož se vracíme bude ve stejně silně souvislé komponentě jako aktuální vrchol.

Plán přednášky

Metrika na grafech

Na každém (neorientovaném) grafu definujeme **vzdálenost uzlů** v a w jako číslo $d_G(v, w)$, která je rovna počtu hran v nejkratší možné cestě z v do w. Pokud cesta neexistuje, píšeme $d_G(v, w) = \infty$.

Metrika na grafech

Na každém (neorientovaném) grafu definujeme **vzdálenost uzlů** v a w jako číslo $d_G(v, w)$, která je rovna počtu hran v nejkratší možné cestě z v do w. Pokud cesta neexistuje, píšeme $d_G(v, w) = \infty$.
Budeme v dalším uvažovat pouze souvislý graf G. Pak pro takto zadanou funkci $d_G : V \times V \to \mathbb{N}$ platí obvyklé tři vlastnosti vzdálenosti:

- $d_G(v, w) \geq 0$ a přitom $d_G(v, w) = 0$ právě tehdy, když $v = w$;
- vzdálenost je symetrická, tj $d_G(v, w) = d_G(w, v)$;
- platí trojúhelníková nerovnost, tj. pro každou trojici vrcholů v, w, z platí

$$d_G(v, z) \leq d_G(v, w) + d_G(w, z).$$

Metrika na grafech

Na každém (neorientovaném) grafu definujeme **vzdálenost uzlů** v a w jako číslo $d_G(v, w)$, která je rovna počtu hran v nejkratší možné cestě z v do w. Pokud cesta neexistuje, píšeme $d_G(v, w) = \infty$.
Budeme v dalším uvažovat pouze souvislý graf G. Pak pro takto zadanou funkci $d_G : V \times V \to \mathbb{N}$ platí obvyklé tři vlastnosti vzdálenosti:

- $d_G(v, w) \geq 0$ a přitom $d_G(v, w) = 0$ právě tehdy, když $v = w$;
- vzdálenost je symetrická, tj $d_G(v, w) = d_G(w, v)$;
- platí trojúhelníková nerovnost, tj. pro každou trojici vrcholů v, w, z platí

$$d_G(v, z) \leq d_G(v, w) + d_G(w, z).$$

Říkáme, že d_G je **metrika na grafu** G.

Metrika na grafu splňuje navíc:

- $d_G(v, w)$ má vždy nezáporné celočíselné hodnoty;
- je-li $d_G(v, w) > 1$, pak existuje nějaký vrchol z různý od v a w a takový, že $d_G(v, w) = d_G(v, z) + d_G(z, w)$.

Každá funkce d_G s výše uvedenými pěti vlastnostmi na $V \times V$ je metrikou nějakého grafu s vrcholy V.

Plán přednášky

Dijkstrův algoritmus

Nejkratší cestu v grafu, která vychází z daného uzlu v a končí v jiném uzlu w můžeme hledat pomocí prohledávání grafu do šířky. Při tomto typu prohledávání totiž postupně diskutujeme vrcholy, do kterých se umíme dostat z výchozího vrcholu po jediné hraně, poté projdeme všechny, které mají vzdálenost nejvýše 2 atd. Na této jednoduché úvaze je založen jeden z nejpoužívanějších grafových algoritmů – tzv. **Dijkstrův algoritmus**.

Dijkstrův algoritmus

Nejkratší cestu v grafu, která vychází z daného uzlu v a končí v jiném uzlu w můžeme hledat pomocí prohledávání grafu do šířky. Při tomto typu prohledávání totiž postupně diskutujeme vrcholy, do kterých se umíme dostat z výchozího vrcholu po jediné hraně, poté projdeme všechny, které mají vzdálenost nejvýše 2 atd. Na této jednoduché úvaze je založen jeden z nejpoužívanějších grafových algoritmů – tzv. **Dijkstrův algoritmus**.
Tento algoritmus hledá nejkratší cesty za (reálného) předpokladu, kdy jednotlivé hrany e jsou ohodnoceny „vzdálenostmi“, tj. kladnými reálnými čísly $w(e)$. Kromě aplikace na hledání vzdáleností v silničních nebo jiných sítích to mohou být také výnosy, toky v sítích atd.

- Vstupem algoritmu je graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran a počáteční vrchol v_0.

- Vstupem algoritmu je graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran a počáteční vrchol v_0.
- Výstupem je ohodnocení vrcholů čísly $d_w(v)$, která udávají nejmenší možný součet ohodnocení hran podél cest z vrcholu v_0 do vrcholu v.

Všimněte si, že místo původní úlohy (nalézt nejkratší cestu mezi **dvěma** vrcholy) řešíme i něco navíc – nalezneme nejkratší cestu z v do **všech** vrcholů.
Postup dobře funguje v orientovaných i neorientovaných grafech.

- Vstupem algoritmu je graf $G = (V, E)$ s ohodnocením hran a počáteční vrchol v_0.
- Výstupem je ohodnocení vrcholů čísly $d_w(v)$, která udávají nejmenší možný součet ohodnocení hran podél cest z vrcholu v_0 do vrcholu v.

Všimněte si, že místo původní úlohy (nalézt nejkratší cestu mezi **dvěma** vrcholy) řešíme i něco navíc – nalezneme nejkratší cestu z v do **všech** vrcholů.
Postup dobře funguje v orientovaných i neorientovaných grafech. Je skutečně podstatné, že všechna naše ohodnocení jsou kladná. Zkusme si rozmyslet třeba cestu P_3 se záporně ohodnocenou prostřední hranou. Při procházení sledu mezi krajními vrcholy bychom „vzdálenost“ zmenšovali každým prodloužením sledu o průchod prostřední hranou tam a zpět.

Dijkstrův algoristmus vyžaduje jen drobnou modifikaci obecného prohledávání do šířky:

- U každého vrcholu v budeme po celý chod algoritmu udržovat číselnou hodnotu $d(v)$, která bude horním odhadem skutečné vzdálenosti vrcholu v od vrcholu v_0.

Dijkstrův algoristmus vyžaduje jen drobnou modifikaci obecného prohledávání do šířky:

- U každého vrcholu v budeme po celý chod algoritmu udržovat číselnou hodnotu $d(v)$, která bude horním odhadem skutečné vzdálenosti vrcholu v od vrcholu v_0.
- Množina již zpracovaných vrcholů bude v každém okamžiku obsahovat ty vrcholy, u kterých již nejkratší cestu známe, tj. $d(v) = d_w(v)$.

Dijkstrův algoristmus vyžaduje jen drobnou modifikaci obecného prohledávání do šířky:

- U každého vrcholu v budeme po celý chod algoritmu udržovat číselnou hodnotu $d(v)$, která bude horním odhadem skutečné vzdálenosti vrcholu v od vrcholu v_0.
- Množina již zpracovaných vrcholů bude v každém okamžiku obsahovat ty vrcholy, u kterých již nejkratší cestu známe, tj. $d(v) = d_w(v)$.
- Do množiny aktivních (právě zpracovávaných) vrcholů W zařadíme vždy právě ty vrcholy y z množiny spících vrcholů Z, pro které je $d(y) = \min\{d(z);\ z \in Z\}$.

Dijkstrův algoritmus

Předpokládáme, že graf G má alespoň dva vrcholy.

- *Inicializační krok:* Nastavíme hodnoty u všech $v \in V$,

$$d(v) = \begin{cases} 0 & \text{pro } v = v_0 \\ \infty & \text{pro } v \neq v_0, \end{cases}$$

nastavíme $Z = V$, $W = \emptyset$.

Dijkstrův algoritmus

Předpokládáme, že graf G má alespoň dva vrcholy.

- *Inicializační krok:* Nastavíme hodnoty u všech $v \in V$,

$$d(v) = \begin{cases} 0 & \text{pro } v = v_0 \\ \infty & \text{pro } v \neq v_0, \end{cases}$$

  nastavíme $Z = V$, $W = \emptyset$.
- *Test cyklu:* Pokud není ohodnocení všech vrcholů $y \in Z$ rovno ∞, pokračujeme dalším krokem, v opačném případě algoritmus končí.

- *Aktualizace stavu vrcholů:*
  - Najdeme množinu N všech vrcholů $v \in Z$, pro které $d(v)$ nabývá nejmenší možné hodnoty

$$\delta = \min\{d(y);\ y \in Z\};$$

  - posledně zpracované aktivní vrcholy W přesuneme do množiny zpracovaných a za nové aktivní vrcholy zvolíme $W = N$ a odebereme je ze spících, tj. množina spících bude nadále $Z \setminus N$.

- *Aktualizace stavu vrcholů:*
  - Najdeme množinu N všech vrcholů $v \in Z$, pro které $d(v)$ nabývá nejmenší možné hodnoty

$$\delta = \min\{d(y);\ y \in Z\};$$

  - posledně zpracované aktivní vrcholy W přesuneme do množiny zpracovaných a za nové aktivní vrcholy zvolíme $W = N$ a odebereme je ze spících, tj. množina spících bude nadále $Z \setminus N$.
- *Tělo hlavního cyklu:* Pro všechny hrany v množině E_{WZ} všech hran vycházejících z některého aktivního vrcholu v a končících ve spícím vrcholu y opakujeme:
  - Vybereme dosud nezpracovanou hranu $e\{x, y\} \in E_{WZ}$;
  - Pokud je $d(x) + w(e) < d(y)$, nahradíme $d(y)$ touto menší hodnotou.

Věta

Pro všechny vrcholy v ležící v souvislé komponentě vrcholu s najde Dijsktrův algoritmus vzdálenosti $d_w(v)$. Vrcholy ostatních souvislých komponent zůstanou ohodnoceny $d(v) = \infty$. Algoritmus lze implementovat tak, že ukončí svoji práci v čase $O(n \log n + m)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran v grafu G.

Důkaz.

- během celého algoritmu platí $d(v) \geq d_w(v)$ pro všechna $v \in V$.

□

Věta

Pro všechny vrcholy v ležící v souvislé komponentě vrcholu s najde Dijsktrův algoritmus vzdálenosti $d_w(v)$. Vrcholy ostatních souvislých komponent zůstanou ohodnoceny $d(v) = \infty$. Algoritmus lze implementovat tak, že ukončí svoji práci v čase $O(n \log n + m)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran v grafu G.

Důkaz.

- během celého algoritmu platí $d(v) \geq d_w(v)$ pro všechna $v \in V$.
- po skončení algoritmu platí $d(v) \leq d_w(v)$ pro všechna $v \in V$ (Prostřednictvím silnějšího tvrzení: jsou-li $0 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k < \infty$ všechny různé konečné vzdálenosti vrcholů od s a označíme-li $M_i = \{v \in V; d_w(v) = d_i\}$, pak se krok *Aktualizace stavu vrcholů* provede přesně k-krát a po jeho i-tém vykonání platí $N = M_i, \delta = d_i$ a $V \setminus Z = \cup_{k=1}^{i} M_i$.)

Modifikace algoritmu

- Pokud nás skutečně zajímá jen nejkratší cesta do konkrétního vrcholu, pak samozřejmě výpočet ukončíme poté, co tento vrchol přejde do množiny již zpracovaných.

Modifikace algoritmu

- Pokud nás skutečně zajímá jen nejkratší cesta do konkrétního vrcholu, pak samozřejmě výpočet ukončíme poté, co tento vrchol přejde do množiny již zpracovaných.
- Můžeme využít dodatečné informace (při hledání nejkratší cesty z Brna do Prahy v silniční síti asi nepojedeme přes Ostravu) – *heuristika* $h : V \to \mathbb{R}$ splňující $w(\{x, y\}) \geq h(x) - h(y)$ pro každou hranu $\{x, y\}$.

Modifikace algoritmu

- Pokud nás skutečně zajímá jen nejkratší cesta do konkrétního vrcholu, pak samozřejmě výpočet ukončíme poté, co tento vrchol přejde do množiny již zpracovaných.
- Můžeme využít dodatečné informace (při hledání nejkratší cesty z Brna do Prahy v silniční síti asi nepojedeme přes Ostravu) – *heuristika* $h : V \to \mathbb{R}$ splňující $w(\{x, y\}) \geq h(x) - h(y)$ pro každou hranu $\{x, y\}$.

Modifikace algoritmu

- Pokud nás skutečně zajímá jen nejkratší cesta do konkrétního vrcholu, pak samozřejmě výpočet ukončíme poté, co tento vrchol přejde do množiny již zpracovaných.
- Můžeme využít dodatečné informace (při hledání nejkratší cesty z Brna do Prahy v silniční síti asi nepojedeme přes Ostravu) – *heuristika* $h : V \to \mathbb{R}$ splňující $w(\{x, y\}) \geq h(x) - h(y)$ pro každou hranu $\{x, y\}$. Doporučení: $h(v)$ je dolní odhad vzdálenosti v do cílového vrcholu (např. vzdálenost „vzdušnou čarou“). Místo minimalizace $d(y)$ pro $y \in Z$ tak v algoritmu minimalizujeme $d(y) + h(y)$.

Další algoritmy a aplikace

Principy **Dijkstrova algoritmu** se využívají v OSPF (Open Shortest Paths First) routovacím protokolu.

Další algoritmy a aplikace

Principy **Dijkstrova algoritmu** se využívají v OSPF (Open Shortest Paths First) routovacím protokolu.

Bellman-Fordův algoritmus

- pracuje na stejném principu jako Dijkstrův; místo postupu po uzlech je zpracovává "naráz" – cyklus *relaxace* probíhá $(|V| - 1)$ krát přes všechny hrany
- připouští záporné hrany a detekuje záporné cykly
- je obvykle časově náročnější než Dijkstrův
- distribuovaná verze je (či spíše byla) používána v *distance-vector routing protocol*

Upravené násobení matic (*all pairs shortest paths*)

- v čase $O(n^3 \log n)$ vypočte vzdálenosti mezi všemi vrcholy
- vychází z matice A délek hran a postupně počítá matice $U_1, U_2, \ldots, U_{|n-1|}$, kde $u_p(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j, která má nejvýše p hran.
- výpočet vychází ze vztahu

$$u_p(i,j) = \min_k \{u_{p-1}(i,k) + a_{k,j}\}.$$

- jde vlastně o "upravené umocňování" A_G (násobení $\rightarrow$ sčítání, sčítání $\rightarrow$ minimum)

Floyd-Warshallův algoritmus (*all pairs shortest paths*)

- v čase $O(n^3)$ vypočte vzdálenosti mezi všemi vrcholy
- vychází z matice A délek hran a postupně počítá matice $U_0, U_1, \ldots, U_{|V|}$, kde $u_k(i,j)$ je délka nejkratší cesty z i do j, kde cesta prochází pouze vrcholy z $\{1, 2, \ldots, k\}$.
- výpočet vychází ze vztahu

$$u_k(i,j) = \min\{u_{k-1}(i,j), u_{k-1}(i,k) + u_{k-1}(k,j)\}.$$

- je efektivnější než "upravená mocnina" A_G (násobení $\rightarrow$ sčítání, sčítání $\rightarrow$ minimum) – ta je totiž $O(n^4)$, resp. (optimalizovaná) $O(n^3 \log n)$.

Plán přednášky

Grafy jedním tahem

Jistě se každý setkal s dětskou hříčkou

Nakresli obrázek jedním tahem.

V řeči grafů to znamená *najděte sled, který projde všechny hrany právě jednou a každý vrchol alespoň jednou*.

Grafy jedním tahem

Jistě se každý setkal s dětskou hříčkou

Nakresli obrázek jedním tahem.

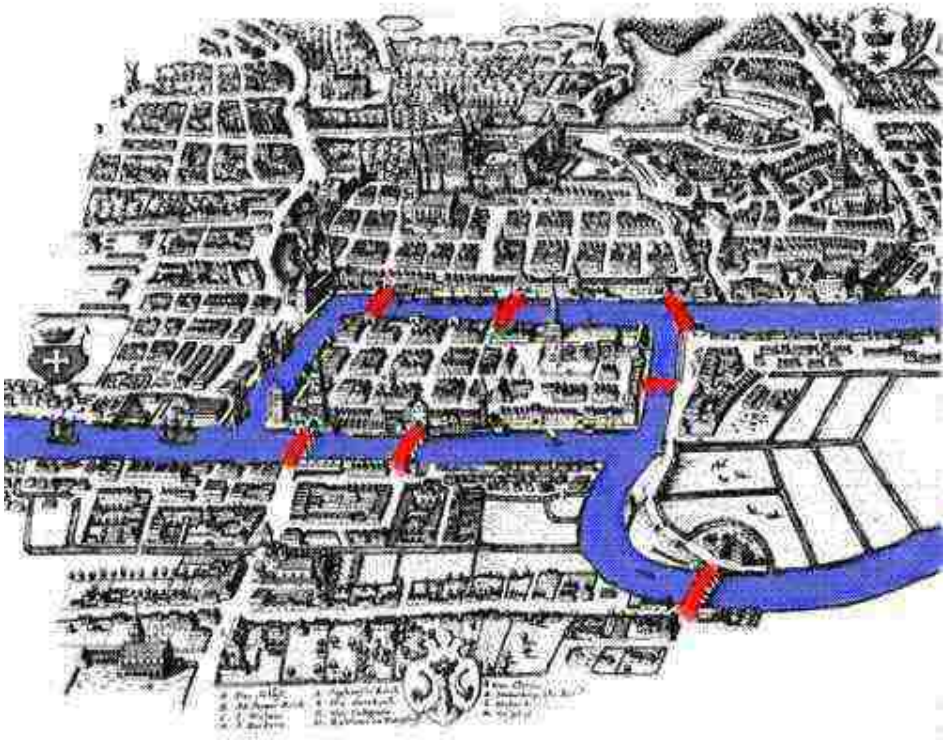
V řeči grafů to znamená *najděte sled, který projde všechny hrany právě jednou a každý vrchol alespoň jednou.*

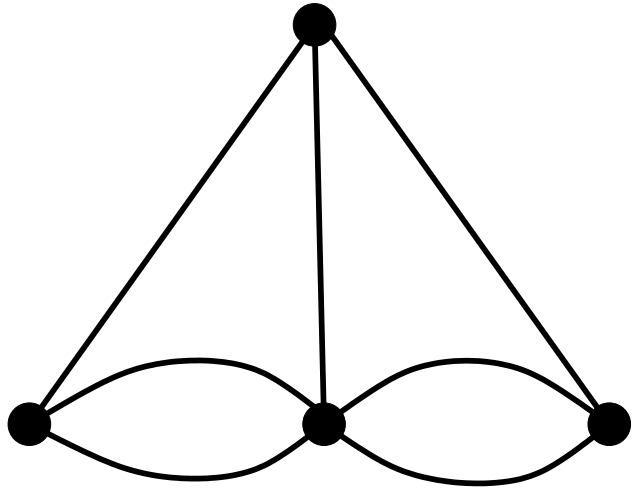
Definice

Sled, který prochází právě jednou všemi hranami a začíná a končí v jednom vrcholu, se nazývá **uzavřený eulerovský tah**.
Grafům, které takový sled připouští říkáme **eulerovské**.
Hovoříme rovněž o (neuzavřeném) eulerovském tahu, kde vypouštíme požadavek na stejný výchozí a cílový vrchol.

Terminologie odkazuje na klasický příběh o sedmi mostech ve městě Královec (Königsberg, tj. Kaliningrad), které se měly projít na procházce každý právě jednou a důkaz nemožnosti takové procházky od Leonharda Eulera z roku 1736.

Terminologie odkazuje na klasický příběh o sedmi mostech ve městě Královec (Königsberg, tj. Kaliningrad), které se měly projít na procházce každý právě jednou a důkaz nemožnosti takové procházky od Leonharda Eulera z roku 1736.
Situace je znázorněna na obrázku. Nalevo dobová mapa, napravo odpovídající (multi)graf. Vrcholy tohoto grafu odpovídají „souvislé pevnině“, hrany mostům.





Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.
Dostatečnost podmínky se ukáže sporem uvážením tahu v G maximální možné délky. □

Kupodivu je obecné řešení takového problému dosti snadné, jak ukazuje následující věta. Samozřejmě také ukazuje, že se Euler zamýšleným způsobem procházet nemohl.

Věta

Graf G je eulerovský tehdy a jen tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy v G mají sudý stupeň.

Důkaz.

Podmínka je zřejmě nutná.
Dostatečnost podmínky se ukáže sporem uvážením tahu v G maximální možné délky. □

Důsledek

Graf lze nakreslit jedním tahem právě tehdy, když má všechny stupně vrcholů sudé nebo když existují právě dva vrcholy se stupněm lichým.

Příklad

1. Určete nejmenší počet mostů, které je třeba v Královci přistavět, aby byl graf eulerovský.
2. Jaká je situace v Kaliningradu nyní (od dob Eulerových doznalo zejména působením válek město mnoho změn)? Byl by dnes schopen Euler svoji procházku realizovat?

Eulerovské orientované grafy

Definice

Orientovaný graf (V, E) nazveme *eulerovský*, jestliže v něm existuje uzavřený orientovaný tah, který obsahuje každou hranu právě jednou a každý vrchol aspoň jednou.

Orientované eulerovské grafy lze rovněž velmi dobře charakterizovat. K tomu ovšem potřebujeme některé nové pojmy.

Definice

Orientovaný graf nazveme *vyvážený*, jestliže pro každý jeho vrchol v platí $\deg_+(v) = \deg_-(v)$.
Symetrizací orientovaného grafu (V, E) nazýváme neorientovaný graf $(V, \overline{E})$, kde

$$\overline{E} = \{\{x, y\}; (x, y) \in E \text{ nebo } (y, x) \in E\}.$$

Věta

Orientovaný graf G je eulerovský právě když je vyvážený a jeho symetrizace je souvislý graf (tj. graf G je slabě souvislý).

Důkaz.

Analogický jako v neorientovaném případě. □

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).
Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.

Problém čínského pošťáka (route inspection problem)

Route inspection problem je zobecněním problému nalezení eulerovského tahu. Úkolem je nalézt nejkratší sled v grafu s ohodnocenými hranami, který obsahuje každou hranu v grafu. Tento problém má v současnosti mnoho praktického využití (analýza DNA, směrování robotů, svoz odpadu, . . .).
Zřejmě je v případě, že graf G je eulerovský, nejkratším takovým sledem příslušný eulerovský tah.
V opačném případě nutně graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně. Tento graf je třeba přidáváním hran doplnit na eulerovský (multi)graf (později ukážeme, že v případě stromů to znamená nutnost zdvojení všech hran). Snadno lze ukázat, že to lze udělat v polynomiálním čase jak v orientovaném, tak neorientovaném případě, v případě multigrafů je to však problém **NP-úplný**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici. Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.

Hamiltonovské grafy

Obdobný požadavek na průchod grafem, ovšem tak, abychom prošli právě jednou každým vrcholem (tj. zároveň nejvýše jednou každou hranou), vede na obtížné problémy. Takový průchod grafem je realizován kružnicí, která obsahuje všechny vrcholy grafu G, hovoříme o **hamiltonovských kružnicích** v grafu G. Graf se nazývá *hamiltonovský*, jestliže má hamiltonovskou kružnici.
Zatímco (zdánlivě podobně složitý) problém nalezení eulerovského tahu je triviální, zjistit, zda je daný graf hamiltonovský, je **NP-úplný problém**.
V praxi je ovšem problém nalezení hamiltonovské kružnice (či jeho modifikace – např. problém obchodního cestujícího) podstatou mnoha problémů v logistice, je proto často žádoucí nalezení i suboptimálního řešení (v případě problému obchodního cestujícího).

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz `http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg`

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Příklad (Icosian Game – William Rovan Hamilton)

Nalezněte hamiltonovskou kružnici v grafu tvořeném vrcholy a hranami pravidelného dodekaedru (dvanáctistěnu) – viz `http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200201hamilton.jpg`

Příklad

Existuje hamiltonovská kružnice v Petersenově grafu?

Věta (Dirac (1952))

Má-li v grafu G s $n \geq 3$ vrcholy každý vrchol stupeň alespoň $n/2$, je G hamiltonovský.

Věta (Ore (1960))

Má-li v grafu G s $n \geq 4$ vrcholy každá dvojice nesousedních vrcholů součet stupňů alespoň n, je G hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Uzávěrem grafu G v této souvislosti rozumíme graf $cl(G)$, který dostaneme z G přidáním všech hran u, v takových, že u, v nejsou sousední a $\deg(u) + \deg(v) \geq n$.

Věta (Bondy,Chvátal (1972))

Graf G je hamiltonovský, právě když je $cl(G)$ hamiltonovský.

Je vidět, že Oreho (a tedy i Diracova) věta je triviálním důsledkem této věty.