Matematika III, 3. cvičení

Derivace funkce zadané implicitně

Funkci značíme písmenem y, proměnnou písmenem x, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace x je 1, ale derivace y je y', takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

Příklad 36. *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

Výsledek. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

Příklad 37. *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

Příklad 38. *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

Příklad 39. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[1, 1]$ *implicitně rovnicí* $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. *Určete* $y'(1)$ *a* $y''(1)$.

Výsledek. $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

Příklad 40. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *implicitně rovnicí* $y - \frac{\sin y}{2} = x$. *Určete* $y'(\frac{\pi-1}{2})$ *a* $y''(\frac{\pi-1}{2})$.

Výsledek. $y'(\frac{\pi-1}{2}) = 1, y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Příklad 41. *Rozhodněte, zda křivka* $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, -1]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Nápověda. Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

Výsledek. $y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Příklad 42. *Rozhodněte, zda křivka* $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, 3]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Výsledek. $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Parciální derivace

Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou parciální derivace prvního řádu definovány takto:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle jedné proměnné považujeme druhou proměnnou za konstantu a derivujeme podle první proměnné.

Parciální derivace druhého a vyšších řádů dostaneme (podobně jako několikanásobné derivace funkcí jedné proměnné) opětovným derivováním dané funkce. Např. f''_{xy} dostaneme tak, že nejdřív zderivujeme funkci f podle x (přitom y považujeme za konstantu) a výsledek pak zderivujeme podle y (tentokrát x považujeme za konstantu).

Příklad 43. *Vypočtěte* f'_x *a* f'_y*, kde* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Příklad 44. *Vypočtěte* f'_x *a* f'_y*, kde* $f(x,y) = x^y; x > 0$.

Příklad 45. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu funkce* $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$.

Výsledek. $f'_x = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1}, f'_y = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{1}{z}, f'_z = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{-y}{z^2}$,
$f''_{xx} = \frac{y}{z}(\frac{y}{z} - 1)x^{\frac{y}{z}-2}, f''_{yy} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{1}{z^2}, f''_{zz} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{y^2}{z^4} + x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{2y}{z^3}$,
$f''_{xy} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} \ln x \cdot \frac{1}{z}, f''_{xz} = \frac{-y}{z^2} x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} \ln x \cdot \frac{-y}{z^2}, f''_{yz} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{-y}{z^3} + x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{-1}{z^2}$.

Příklad 46. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řádu funkce* $f(x,y,z) = x^{y^z}$ *(pozor:* $x^{y^z} = x^{(y^z)} \neq (x^y)^z$*).*

Příklad 47. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního řádu:* $f(x,y) = \ln(\frac{x+4}{y^2})$.

Příklad 48. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu:* $f(x,y) = \frac{\cos(x^2)}{y}$.

Příklad 49. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[1, \sqrt{2}, 2]$ *funkce* $z = f(x,y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$.

Výsledek. $z'_x(1, \sqrt{2}) = \frac{z-2x}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z'_y(1, \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}z-2y}{2z-x-\sqrt{2}y} = 0$, $z''_{xx}(1, \sqrt{2}) = z''_{yy}(1, \sqrt{2}) = -2$, $z''_{xy}(1, \sqrt{2}) = 0$.

Příklad 50. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu v bodě* $[-2, 0, 1]$ *funkce* $z = f(x,y)$ *definované v okolí daného bodu implicitně rovnicí* $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

Výsledek. $z'_x(-2, 0) = -\frac{4x+8z}{8x+2z-1} = 0$, $z'_y(-2, 0) = -\frac{4y}{8x+2z-1} = 0$, $z''_{xx}(-2, 0) = z''_{yy}(-2, 0) = \frac{4}{15}$, $z''_{xy}(-2, 0) = 0$.

Směrové derivace

Je-li $u = (u_1, u_2)$ nenulový vektor, pak směrová derivace funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ ve směru vektoru u je

$$f'_u(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + u_1 t, y_0 + u_2 t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Zřejmě $f'_x = f'_{(1,0)}$ a $f'_y = f'_{(0,1)}$.

Jiný způsob výpočtu směrové derivace: Nejdříve spočítáme obě parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ a $f'_y(x_0, y_0)$. Pak

$$f'_u(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot u_1 + f'_y(x_0, y_0) \cdot u_2.$$

Pro funkce tří a více proměnných je to analogické.

Příklad 51. *Vypočtěte* $f'_u(1, -1)$*, kde* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2 + y^2)$ *a* $u = (1, 2)$.

Výsledek. $-\frac{2}{5}$.

Příklad 52. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = x^3 + 4xy$ *v bodě* $[2, -1]$ *ve směru vektoru* $(1, 3)$.

Výsledek. $f'_{(1,3)}(2, -1) = 32$.

Příklad 53. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ *v bodě* $[1, 1]$ *ve směru vektoru* $(-1, 3)$.

Výsledek. $f'_{(-1,3)}(1,1) = \sqrt{2}$.

Příklad 54. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = e^{x(y-1)}$ *v bodě* $[0,2]$ *ve směru vektoru* $(-1,2)$.

Výsledek. $f'_{(-1,2)}(0,2) = -1$.

Příklad 55. *Vypočtěte směrovou derivaci funkce* $f(x,y,z) = z - e^x \sin y$ *v bodě* $[\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3]$ *ve směru vektoru* $(1,2,2)$.

Výsledek. $f'_{(1,2,2)}(\ln 3, \frac{3\pi}{2}, -3) = 5$.

Směrové derivace a spojitost

V následujícím příkladě si ukážeme, že z existence derivací funkce více proměnných v libovolném směru neplyne spojitost této funkce (avšak u funkce jedné proměnné z existence derivace plyne spojitost).

Příklad 56. *Dokažte, že funkce*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^2}{x^8+y^4} & \textit{pro } [x,y] \neq [0,0], \\ 0 & \textit{pro } [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

není spojitá v bodě $[0,0]$*, ale v tomto bodě existuje derivace funkce* f *v libovolném směru.*

Nápověda. Pomocí přibližování se k limitnímu bodu po parabolách dokažte, že funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu; směrové derivace vypočítejte podle definice.