Matematika III, 4. cvičení

Diferenciál, aproximace, tečná rovina

Pro funkci jedné proměnné $y = f(x)$ je diferenciál v bodě x_0 dán vztahem $df(x) = f'(x_0)dx$. Pro funkci dvou proměnných $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí $df(x,y) = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy$, diferenciál v pevném bodě $[x_0, y_0]$ je

$$df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy.$$

Pomocí diferenciálu se určí rovnice tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0, f(x_0,y_0)]$:

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (= f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)).$$

V okolí bodu dotyku tečné roviny můžeme tedy přibližně vypočítat funkční hodnoty (místo přesné funkční hodnoty vezmeme hodnotu z tečné roviny):

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Analogicky se pomocí parciálních derivací prvního řádu určí vztahy pro diferenciál a tečnou nadrovinu funkce více proměnných.

Diferenciál

Příklad 57. *Určete diferenciál funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ *v bodě* $[\sqrt{3}, 1]$.

Výsledek. $df(\sqrt{3}, 1) = \frac{1}{4}dx + \frac{1}{2}dy$.

Příklad 58. *Určete diferenciál funkce* $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *v bodě* $[1, \sqrt{3}]$.

Výsledek. $df(1, \sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}dx - \frac{1}{4}dy$.

Příklad 59. *Určete diferenciál funkce* $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ *v bodě* $[1, 1]$.

Výsledek. $df(1,1) = 2dx$.

Příklad 60. *Vypočtěte diferenciál funkce* $f(x,y,z) = 2^x \sin y \operatorname{arctg} z$ *v bodě* $[-4, \frac{\pi}{2}, 0]$ *pro* $dx = 0{,}05, dy = 0{,}06$ *a* $dz = 0{,}08$.

Výsledek. $df(-4, \frac{\pi}{2}, 0) = 0dx + 0dy + \frac{1}{16}dz = 0{,}005$.

Aproximace

Příklad 61. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\sqrt{2{,}98^2 + 4{,}05^2}$.

Výsledek. $5{,}028$.

Příklad 62. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\operatorname{arctg} \frac{1{,}02}{0{,}95}$.

Nápověda. Zvolte funkci $\operatorname{arctg} \frac{x}{y}, x_0 = y_0 = 1$.

Výsledek. $\frac{\pi}{4} + 0{,}035$.

Příklad 63. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\ln(0{,}97^2 + 0{,}05^2)$.

Nápověda. Zvolte funkci $\ln(x^2 + y^2), x_0 = 1, y_0 = 0$.

Výsledek. $-0{,}06$.

Příklad 64. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $\arcsin\frac{0{,}48}{1{,}05}$.

Nápověda. Zvolte funkci $\arcsin\frac{x}{y}, x_0 = 0,5, y_0 = 1$.

Výsledek. $\frac{\pi}{6} - \frac{0{,}09}{\sqrt{3}}$.

Příklad 65. *Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte* $1,04^{2{,}02}$.

Nápověda. Zvolte funkci $x^y, x_0 = 1, y_0 = 2$.

Výsledek. $1,08$.

Příklad 66. *O kolik* cm^3 *se přibližně změní objem kužele s poloměrem podstavy* $r = 10\,cm$ *a výškou* $v = 10\,cm$*, zvětšíme-li poloměr podstavy o* $5\,mm$ *a výšku o* $5\,mm$ *zmenšíme?*

Nápověda. Použijeme funkci pro objem kužele $V(r,v) = \frac{1}{3}\pi r^2 v, r_0 = 10, v_0 = 10$, chceme spočítat $V(10,5; 9,5) - V(10; 10)$.

Výsledek. Objem kužele se zvětší asi o $\frac{50}{3}\pi cm^3$.

Tečná rovina

Příklad 67. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ?]$.

Výsledek. $x + y + z = \sqrt{3}$.

Příklad 68. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [0, 0, ?]$.

Výsledek. $z_0 = 1, z = 1$.

Příklad 69. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [1, 1, ?]$.

Výsledek. $z_0 = 4, 3x + 5y - z = 4$.

Příklad 70. *Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ *v bodě* $[x_0, y_0, z_0] = [1, -1, ?]$.

Výsledek. $z_0 = -\frac{\pi}{4}, x + y - 2z = \frac{\pi}{2}$.

Příklad 71. *Na kuželosečce k o rovnici* $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ *najděte všechny body, v nichž je normála k této kuželosečce rovnoběžná s osou* y*. Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.*

Výsledek. $[1, 1]$ a $[1, -3]$, rovnice tečen jsou $y = 1$, resp. $y = -3$.

Příklad 72. *Na kuželosečce o rovnici* $3x^2 + 6y^2 - 3x + 3y - 2 = 0$ *najděte všechny body, v nichž je normála k této kuželosečce rovnoběžná s osou prvního kvadrantu. Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.*

Výsledek. Hledané body tedy jsou $[4/3, 1/6]$ a $[-1/3, -2/3]$, obecné rovnice tečen ke kuželosečce v těchto bodech jsou $x + y = 3/2$, resp. $x + y = -1$.

Příklad 73. *Na kuželosečce o rovnici* $x^2 + xy + 2y^2 - x + 3y - 54 = 0$ *najděte všechny body, v nichž je normála k této kuželosečce rovnoběžná s osou* x*. Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.*

Výsledek. Hledané body tedy jsou $[-7, 1]$ a $[9, -3]$, obecné rovnice tečen ke kuželosečce v těchto bodech jsou $x = -7$, resp. $x = 9$.

Příklad 74. *Na grafu funkce tří proměnných $u = f(x, y, z)$ dané předpisem $u = x\sqrt{y^2 + z^2}$ najděte bod, v němž je tečná nadrovina k tomuto grafu rovnoběžná s rovinou o rovnici $x + y - z - u = 0$.*

Výsledek. Zadání splňují dva body: $[\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $[-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$.

Příklad 75. *K elipsoidu o rovnici $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou o rovnici $x - y + 2z = 0$.*

Nápověda. Rovnici tečné roviny k elipsoidu určíme pomocí parciálních derivací funkce $z = z(x, y)$ dané implicitně rovnicí elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Pak normálový vektor k elipsoidu v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ bude $(z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), 1)$. Tento vektor musí být rovnoběžný s normálovým vektorem $(1, -1, 2)$ zadané roviny, tudíž $(2z'_x(x_0, y_0), 2z'_y(x_0, y_0), 2) = (1, -1, 2)$. Z toho dostaneme $2x_0 = z_0, 4y_0 = -z_0$ a po dosazení do rovnice elipsoidu dostaneme dva body dotyku hledaných tečných rovin: $[\frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}, \frac{4}{\sqrt{22}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{22}}, +\frac{1}{\sqrt{22}}, -\frac{4}{\sqrt{22}}]$. Odtud už snadno určíme rovnice tečných rovin.

Výsledek. Hledané tečné roviny mají rovnice $x - y + 2z = \pm\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$.

Taylorův polynom funkce více proměnných, aproximace

Připomeňme, že Taylorův polynom stupně $n \in \mathbb{N}$ funkce jedné proměnné $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se středem v bodě x_0, ve kterém existují vlastní derivace $f'(x_0)$, $f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$, je polynom

$$T_n(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Máme-li funkci dvou proměnných $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která má v bodě $[x_0, y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace až do řádu $n + 1$ včetně, pak pro každý bod $[x, y]$ z tohoto okolí platí $f(x, y) = T_n(x, y) + R_n(x, y)$, kde

$$\begin{gathered}
T_n(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)+ \\
+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2]+ \\
+ \cdots + \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-j}\partial y^j}(x_0, y_0)(x - x_0)^{n-j}(y - y_0)^j
\end{gathered}$$

je Taylorův polynom stupně n funkce f se středem v bodě $[x_0, y_0]$ a $R_n(x, y)$ je zbytek. Pro funkci více proměnných se Taylorův polynom určí analogicky, např. pro funkci tří proměnných vypadá člen s druhými derivacemi takto:

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)^2 + f''_{yy}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)^2 + f''_{zz}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)^2+ \\
+2f''_{xy}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(y - y_0) + 2f''_{xz}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0)(z - z_0)+ \\
+2f''_{yz}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0)(z - z_0)].
\end{gathered}$$

Taylorův polynom můžeme (stejně jako u funkcí jedné proměnné) využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot.

Taylorův polynom

Příklad 76. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y)=\sin x \sin y$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0]=[0,0]$.

Výsledek. $T_2(x,y)=\frac{1}{2!}\cdot 2\cdot 1(x-0)(y-0)=xy$.

Příklad 77. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0,z_0]=[1,1,1]$.

Výsledek. $T_2(x,y,z)=1+(x-1)+(x-1)(y-1)-(x-1)(z-1)$.

Příklad 78. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0]=[1,1]$.

Výsledek. $T_2(x,y)=\frac{\ln 2}{2}+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-\frac{1}{2}(x-1)(y-1)$.

Příklad 79. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{1+x+y}{1-x+y}$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0]=[0,0]$.

Výsledek. $T_2(x,y)=\frac{\pi}{4}+x-\frac{xy}{2}$.

Příklad 80. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y)=\frac{\cos x}{\cos y}$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0]=[0,0]$.

Výsledek. $T_2(x,y)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}$.

Příklad 81. *Určete Taylorův polynom 2. stupně funkce* $f(x,y)=\arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *se středem v bodě* $[x_0,y_0]=[0,1]$.

Výsledek. $T_2(x,y)=x-x(y-1)$.

Příklad 82. *Nechť je funkce* $y=y(x)$ *dána v okolí bodu* $[1,1]$ *implicitně rovnicí* $y^3-2xy+x^2=0$. *Určete Taylorův polynom 2. stupně této funkce v bodě* $x_0=1$.

Výsledek. $y(1)=1, y'(1)=0, y''(1)=-2$, tudíž $T_2(x)=1+0(x-1)+\frac{1}{2!}(-2)(x-1)^2=1-(x-1)^2$.

Aproximace

Příklad 83. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $\sqrt{2,98^2+4,05^2}$.

Výsledek. $5,0282116$.

Příklad 84. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $1,04^{2,02}$.

Nápověda. Zvolte funkci $f(x,y)=x^y, x_0=1, y_0=2$.

Výsledek. $1,04^{2,02}\doteq 1,0824$. Na straně 2 jsme pomocí diferenciálu získali přibližnou hodnotu $1,08$, přesná hodnota je $1,082448755\ldots$ Opět jsme tedy získali mnohem lepší aproximaci oproti dřívějšímu výpočtu.

Příklad 85. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $\operatorname{arctg}\frac{1,04}{0,98}$.

Nápověda. Zvolte funkci $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}, x_0=1, y_0=1$.

Výsledek. $\operatorname{arctg}\frac{1,04}{0,98}\doteq\frac{\pi}{4}+0,0297$.

Příklad 86. *Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte* $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$.

Nápověda. Zvolte funkci $f(x,y)=\sin x \operatorname{tg} y, x_0=\frac{\pi}{6}, y_0=\frac{\pi}{4}$, musíme počítat v radiánech, nikoliv ve stupních!

Výsledek. $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \doteq \frac{1}{2}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}+(\frac{3}{4}-\sqrt{3})\frac{\pi^2}{180^2}$.