Matematika III, 6. cvičení

Absolutní extrémy funkcí více proměnných na kompaktní množině

Na kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině M nabývá funkce f svých absolutních (globálních) extrémů buď ve stacionárních bodech ležících v M nebo na hranici množiny M. Při určování absolutních extrémů funkce f postupujeme takto:

(1) určíme stacionární body uvnitř M, případně body, ve kterých nějaká parciální derivace funkce f neexistuje;

(2) vyšetříme funkci f na hranici M;

(3) vybereme největší a nejmenší dosaženou funkční hodnotu.

V bodě (2), který bývá obvykle nejtěžší, se dá pro funkci dvou proměnných postupovat následujícím způsobem:

Na částech M_i hranice M si vyjádříme y pomocí x nebo naopak (hranici M rozdělíme na takové části M_i, aby vyjádření jedné proměnné pomocí druhé nebylo moc komplikované), a to pak dosadíme do předpisu funkce f, čímž pro každou část M_i dostaneme novou funkci g_i jedné proměnné. U každé funkce g_i určíme také uzavřený interval (protože M je uzavřená, bude také interval uzavřený), ze kterého je proměnná této funkce, a na tomto intervalu vyšetříme funkci g_i, tj. určíme funkční hodnoty funkce g_i v krajních bodech intervalu, v jejích stacionárních bodech ležících uvnitř intervalu a případně v bodech uvnitř intervalu, ve kterých neexistuje g_i'. Tyto hodnoty funkce g_i budou stejné jako hodnoty funkce f v odpovídajících bodech na hranici M.

Příklad 98. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ *na množině* $M : x^2 + y^2 \leq 4$.

Výsledek. Největší hodnota je $\frac{3}{e}$ pro $[x,y] = [0,\pm 1]$, nejmenší hodnota je 0 pro $[x,y] = [0,0]$.

Příklad 99. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ *na trojúhelníku* M *ohraničeném souřadnými osami a přímkou* $x + y - 4 = 0$.

Výsledek. Jediným stacionárním bodem je $[1,1]$, v němž je absolutní maximum $f(1,1) = 1$. Absolutní minimum -12 je v bodech $[4,0]$ a $[0,4]$ ležících na hranici.

Příklad 100. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$ *na trojúhelníku* M *s vrcholy* $A = [0,2], B = [3,0]$ *a* $C = [0,-1]$.

Výsledek. Absolutní maximum je 7 v bodě $[0,-1]$, absolutní minimum je $-\frac{13}{4}$ v bodě $[\frac{1}{2},1]$. Funkční hodnoty v kandidátech na extrém jsou: $f(\frac{1}{2},1) = -\frac{13}{4}, f(0,-1) = 7, f(0,2) = -2, f(3,0) = 0, f(0,\frac{5}{4}) = -\frac{25}{8}, f(\frac{9}{10},\frac{7}{5}) = -\frac{49}{20}, f(\frac{36}{17},-\frac{5}{17}) = -\frac{25}{17}$.

Příklad 101. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$ *na množině* $M : x^2 + y^2 \leq 9$.

Výsledek. Absolutní maximum je 36 v bodech $[0,\pm 3]$, absolutní minimum je 0 v bodě $[0,0]$.

Příklad 102. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^2 + 2$ *na množině* M *ohraničené grafy funkcí* $y = 2$ *a* $y = |x|$.

Výsledek. Absolutní maximum je 22 v bodě $[2,2]$, absolutní minimum je -2 v bodě $[-2,2]$.

Příklad 103. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce* $f(x,y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ *na množině určené podmínkami* $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

Výsledek. Absolutní maximum je 17 v bodě $[1, 2]$, absolutní minimum je -3 v bodě $[1, 0]$.

Příklad 104. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině $M : x^2 + y^2 \le z \le 1$.*

Nápověda. Protože $f'_x = 1, f'_y = 2, f'_z = 3$, nejsou žádné stacionární body, tudíž hledané hodnoty budou na hranici M, tj. na množině $M_1 \cup M_2$, kde $M_1 : x^2 + y^2 = z \le 1, M_2 : x^2 + y^2 \le z = 1$. Pro M_1 máme funkci $f_1(x, y) = x + 2y + 3(x^2 + y^2)$ na množině $N_1 : x^2 + y^2 \le 1$, pro M_2 máme funkci $f_2(x, y) = x + 2y + 3$ na množině $N_2 : x^2 + y^2 \le 1$. Pro funkce dvou proměnných už to (snad) umíme dořešit.

Výsledek. Absolutní maximum je $3 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ v bodě $[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1]$, absolutní minimum je $-\frac{5}{12}$ v bodě $[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}]$.

V některých speciálních případech (pokud např. umíme sestrojit vrstevnice funkce, jejíž extrémy hledáme, a pokud množina, na níž tyto extrémy hledáme, je „dostatečně jednoduchá“) můžeme použít rychlejší metodu, kterou si objasníme na následujícím příkladu:

Příklad 105. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = x - y$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : x^2 + y^2 \le 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum v bodě $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $\sqrt{2}$, absolutní minimum v bodě $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $-\sqrt{2}$.

Příklad 106. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = xy$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : |x| + |y| \le 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $\frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$, absolutní minimum je $-\frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}]$.

Příklad 107. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y + 10$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : x^2 + y^2 \le 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $11 + 4\sqrt{2}$ v bodě $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, absolutní minimum je $11 - 4\sqrt{2}$ v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Příklad 108. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = |x| + |y|$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \le 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $2 + \sqrt{2}$ v bodě $[1 + 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}]$, absolutní minimum je $2 - \sqrt{2}$ v bodě $[1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}]$.

Jacobiho matice zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a jeho inverze

Nechť $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že funkce f, g (tj. složky zobrazení F) mají v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace a že Jacobiho matice $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ je regulární, tj. $\det F'(x_0, y_0) \ne 0$ ($\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá jacobián zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$). Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je zobrazení F prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení F^{-1} v okolí bodu $F(x_0, y_0)$, a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ platí $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$.

Příklad 109. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy$ (tj. zobrazení $z \mapsto z^2$, uvažujeme-li F jako zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V případě, že ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$.*

Výsledek. $\det F'(2,1) = 20 \neq 0$, tudíž v nějakém okolí bodu $[2,1]$ je F prosté. Dále

$$(F^{-1})'(3,4) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 110. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x,y) = xy, g(x,y) = \frac{x}{y}$, prosté v nějakém okolí bodu $[2,1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2,1)$.*

Výsledek. $\det F'(2,1) = -4 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[2,1]$. Dále

$$(F^{-1})'(2,2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 111. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f,g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, g(x,y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0,1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0,1)$.*

Výsledek. $\det F'(0,1) = -1 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[0,1]$. Dále

$$(F^{-1})'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 112. *Spočítejte jacobián funkce F, která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

Nápověda. Funkce F je definována následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} [x,y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \quad \text{pro } x > 0, \\ [x,y] &\mapsto \left[\sqrt{x^2+y^2}, \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right] \quad \text{pro } x < 0, \\ [0,y] &\mapsto \left[y, \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(y)\right]. \end{aligned}$$

Z polárních souřadnic nazpět je to $F^{-1} : [r,\varphi] \mapsto [r\cos\varphi, r\sin\varphi]$. Lépe se bude počítat, když napřed určíme jacobián zobrazení F^{-1} a z něj pak jacobián zobrazení F.

Výsledek. $\det(F^{-1})' = r, \det F' = \frac{1}{r}$.