

## Teorie grafů

### Matematika III, 8. cvičení

Pojmy k zopakování:

- Graf, stupeň vrcholu, kružnice, cesta, cyklický žebřík
- Úplný graf, bipartitní graf, úplný bipartitní graf
- Izomorfismus grafů
- Skóre grafu
- Souvislost grafu, hranová a vrcholová souvislost
- Prohledávání grafu do hloubky, do šířky

**Příklad 136.** Určete, kolik hran mají následující grafy:  $K_6$ ,  $K_{5,6}$ ,  $C_8$ .

*Výsledek.*  $K_6$  má 15 hran,  $K_{5,6}$  má 30 hran,  $C_8$  má 8 hran.

**Příklad 137.** Určete, kolik hran musíme přidat do kružnice o  $n$  vrcholech, abychom dostali úplný graf.

*Výsledek.*  $\frac{n(n-1)}{2} - n$

**Příklad 138.** Určete, kolik hran musíme přidat do úplného bipartitního grafu  $K_{m,n}$ , abychom dostali úplný graf.

*Výsledek.*  $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} - m \cdot n$ .

**Příklad 139.** Definujme úplný tripartitní graf následovně. Uvažujme tři po dvou disjunktní množiny vrcholů  $V_1, V_2, V_3$ . Hranou spojme každé dva vrcholy, pokud neleží oba dva ve  $V_i$  pro nějaké  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Pokud  $|V_1| = r, |V_2| = s, |V_3| = t$ , označme úplný tripartitní graf symbolem  $K_{r,s,t}$ . Nakreslete  $K_{1,2,3}$ ,  $K_{2,2,2}$ ,  $K_{2,3,3}$ .

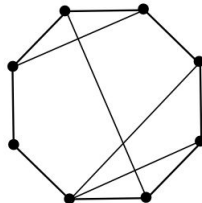
**Příklad 140.** Určete, kolik existuje navzájem neizomorfních úplných bipartitních grafů s 1001 hranami.

*Výsledek.* 4

**Příklad 141.** Určete, kolik vrcholů má cyklický žebřík s 2010 hranami.

*Výsledek.* 1340

**Příklad 142.** Zadejte následující graf maticí sousednosti.



**Příklad 143.** Dostanete orientovaný graf reprezentovaný maticí sousednosti  $A$ . Určete, jaký graf bude zadávat transponovaná matice této matice.

**Příklad 144.** Dokažte, že součet stupňů všech vrcholů v libovolném jednoduchém grafu je sudý.

**Příklad 145.** Kolik je všech cyklů v grafu  $K_6$ ? Kolik v  $K_n$ ?

Výsledek.  $\binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}$ .

$$\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + \binom{n}{5} \cdots + \binom{n}{n} = 2^n - 1 - n - \frac{n(n-1)}{2}.$$

**Příklad 146.** Dokažte, že v každém jednoduchém grafu o více než jednom vrcholu existuje dvojice vrcholů se stejným stupněm.

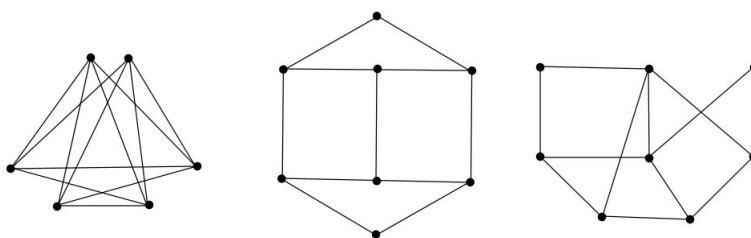
**Příklad 147.** Na konferenci se sešlo  $n$  matematiků a několik z nich si navzájem potřásl rukou. Dokažte, že mezi nimi existují dva matematici, kteří si potřásl rukama se stejným počtem lidí.

Nápověda: Využijte předchozí příklad.

**Příklad 148.** Sešlo se 5 lidí. Je možné, že se každý z nich zná s právě třemi ostatními (předpokládejte, že známost je symetrická)?

Výsledek. Ne

**Příklad 149.** Určete, který z následujících grafů je bipartitní. Svě tvrzení dokažte.



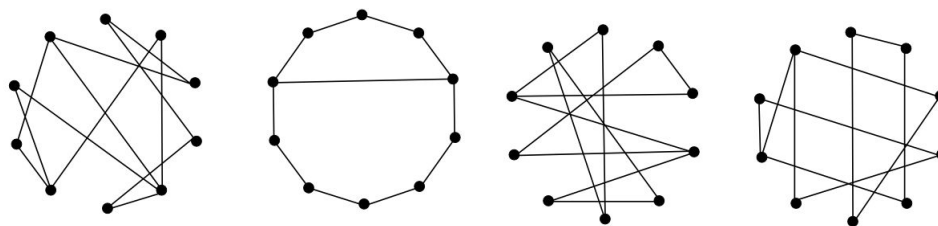
Výsledek. První ne, další dva ano.

**Příklad 150.** Uveďte příklad dvou neizomorfních grafů o šesti vrcholech, každý stupně 2.

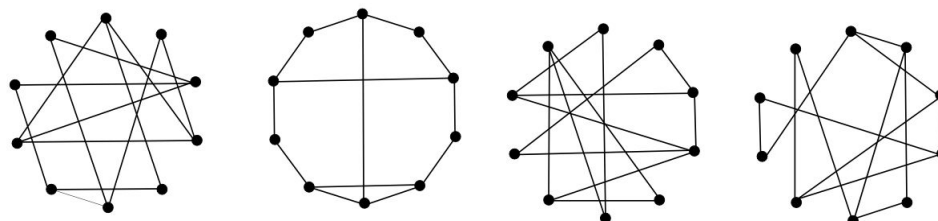
**Příklad 151.** Dokažte, že neexistují dva neizomorfní grafy o pěti vrcholech, každý stupně 2.

**Příklad 152.** Dokažte, že dva grafy jsou izomorfní, jsou-li izomorfní jejich doplňky.

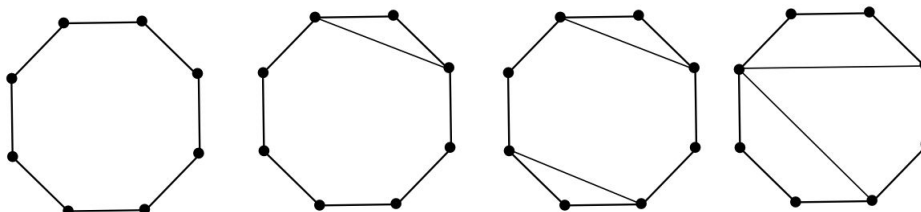
**Příklad 153.** Dokažte, že každé dva z uvedených grafů jsou izomorfní.



**Příklad 154.** Rozhodněte, které dva z uvedených grafů jsou izomorfní. Daný izomorfismus popište.



**Příklad 155.** Určete, kolik navzájem neizomorfních grafů můžeme dostat přidáním jedné hrany do následujících grafů.



**Příklad 156.** Nakreslete všechny neizomorfní grafy na

1. 2 vrcholech
2. 3 vrcholech
3. 4 vrcholech
4. 5 vrcholech

**Příklad 157.** Kolik existuje neizomorfních grafů s 6 vrcholy, všemi stupně 3?

Nápověda: Uvažujte doplňky grafů.

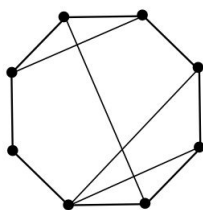
**Příklad 158.** Dokažte, že pro každé přirozené číslo  $n$  existuje graf se skórem

$$(0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots, n, \dots, n).$$

**Příklad 159.** Určete všechna nezáporná celá čísla  $a$  pro která existuje graf se skórem

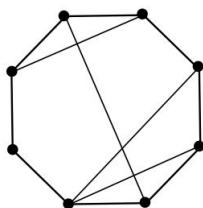
1.  $(1, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 9, 11, 11, a)$
2.  $(4, 6, 6, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, a)$

**Příklad 160.** Uved'te příklad grafu, který má stejné skóre jako graf na obrázku a přesto není s tímto grafem izomorfní.



**Příklad 161.** Nakreslete všechny navzájem neizomorfní grafy se skórem  $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 6)$ .

**Příklad 162.** Určete, kolik podgrafů izomorfních  $C_3$  obsahuje následující graf.



Výsledek. 3

**Příklad 163.** Určete, kolik podgrafů izomorfních  $C_3$  obsahuje graf  $K_n$ .

Výsledek.  $\binom{n}{3}$

**Příklad 164.** Kolik podgrafů úplného grafu  $K_{10}$  je izomorfních kružnici  $C_4$ ?

Výsledek.  $3 \cdot \binom{10}{4}$

**Příklad 165.** Určete, kolik nejvíce komponent souvislosti může mít graf s 2010 vrcholy, každým stupně 4.

Výsledek. 402

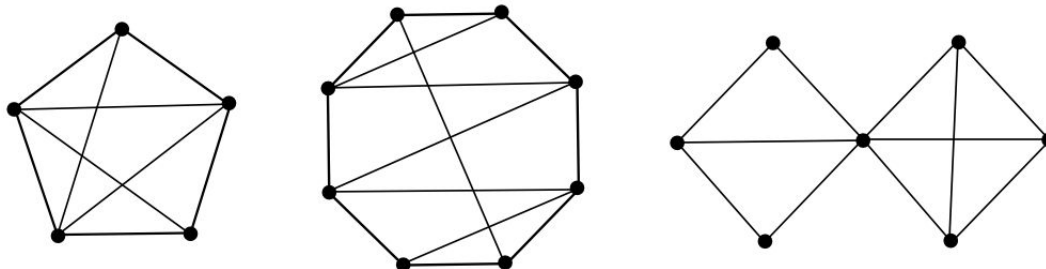
**Příklad 166.** Určete, kolik nejméně hran musí mít graf na 12 vrcholech, aby jeho stupeň (vrcholové) souvislosti byl 3.

Výsledek. 18

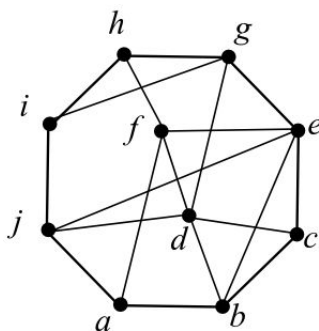
**Příklad 167.** Určete, kolik nejvíce hran může mít graf na 10 vrcholech, který se skládá ze tří komponent souvislosti.

Výsledek. 28

**Příklad 168.** Určete vrcholovou i hranovou souvislost následujících grafů:



**Příklad 169.** Určete, v jakém pořadí vrcholů byste prohledávali tento graf do šířky a v jakém pořadí vrcholů do hloubky, prohledáváte-li z vrcholu  $a$ .



**Příklad 170.** Určete, v jakém pořadí vrcholů byste prohledávali tento graf zadaný seznamem následníků do šířky a v jakém pořadí vrcholů do hloubky, prohledáváte-li z vrcholu  $a$ .

<b>a</b>	b	c	d	
<b>b</b>	a	e	f	g
<b>c</b>	a	g	h	
<b>d</b>	a			
<b>e</b>	b	i		
<b>f</b>	b	i		
<b>g</b>	b	c	h	
<b>h</b>	c	g		
<b>i</b>	e	f		

**Příklad 171.** Oba orientované grafy na následujících obrázcích projděte pomocí průchodu do hloubky. Pokud si v některém kroku můžete vybrat z několika vrcholů, tak si vždy vyberte ten abecedně nejmenší z nich.

