graf funkce: zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^{n+1}$

$[x_1,\dots,x_n] \mapsto [x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)]$

9 29-15:06

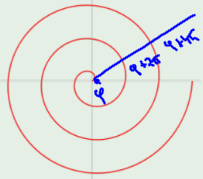
Literatura | Zobrazení a funkce více proměnných | Limita a spojitost funkce | Parciální a směrové derivace

Funkce jedné proměnné v polárních souřadnicích

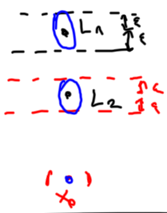
Jak už jsme podotkli, kartézské souřadnice jsou nejběžnější, ale nikoliv jediné možné. Mnohé „objekty" mají např. v polárních souřadnicích výrazně jednodušší vyjádření (toho využijeme i později zejména pro výpočty obsahů či objemů takových objektů).

Příklad

Archimedova spirála má v polárních souřadnicích rovnici $r(\varphi) = a + b\varphi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry.



9 29-15:12



stačí zvolit disjunktní okolí $U(L_1)$, $U(L_2)$

$f(x) \le g(x) \le h(x)$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) \Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = L$

$= L$

9 29-15:15

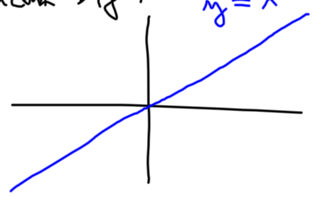
a hromadný

$a_0, a_1, a_2, \dots \to a$

9 29-15:29

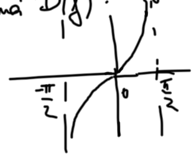
Weierstrass:

- na ohraničená $D(f)$:



∄ max, min

• na uzavřená $D(f)$: $y = \operatorname{arctg} x$ na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



9 29-15:32

$y = f(x)$ $\quad f'(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\left(f(x^*+t) - f(x^*)\right)$

Literatura | Zobrazení a funkce více proměnných | Limita a spojitost funkce | Parciální a směrové derivace

Parciální derivace jsou nejsnazším rozšířením pojmu derivace funkce jedné proměnné, kdy se na funkci $f(x_1,\dots,x_n)$ více proměnných díváme jako na funkci jedné proměnné x_i a ostatní považujeme za konstatní.

Definice

Existuje-li limita

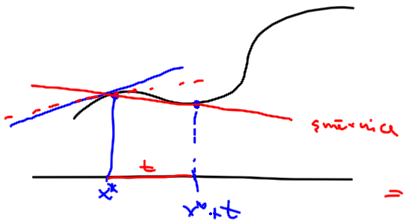
$x^* + t\cdot(0,0,\dots,1,\dots,0)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x_1^*,\dots,x_{i-1}^*,x_i^*+t,x_{i+1}^*,\dots,x_n^*) - f(x_1^*,\dots,x_n^*)\right),$$

říkáme, že funkce $f: E_n \to \mathbb{R}$ má v bodě $[x_1^*,\dots,x_n^*]$ parciální derivaci podle proměnné x_i a značíme $f_{x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)$ (příp. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)$ nebo $f'_{x_i}(x_1^*,\dots,x_n^*)$).

Podobně jako v případě jedné proměnné, pokud má funkce $f: E_n \to \mathbb{R}$ parciální derivace ve všech bodech nějaké otevřené množiny, jsou tyto derivace rovněž funkcemi z E_n do $\mathbb{R}$.

9 29-15:40



$$\frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{x^*+t-x^*} = \frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{t}$$

$t \to 0$

směrnice $\to f'(x^*) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x^*+t)-f(x^*)}{t}$

9 29-15:42

Pro funkce v E_2 dostáváme $\varphi(x) = f(x, y_0)$

$\varphi'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$

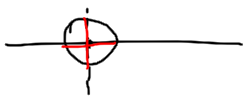
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)) = $$
$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0, y_0+t) - f(x_0, y_0)) = $$
$$= \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Poznámka

Parciální derivace funkce $f : E_2 \to \mathbb{R}$ podle x v bodě $[x_0, y_0]$ udává směrnici tečny v bodě $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ ke křivce, která je průsečíkem grafu G_f s rovinou $y = y_0$.

9 29-15:47

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x=0 \vee y=0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



9 29-15:56

Literatura | Zobrazení a funkce více proměnných | Limita a spojitost funkce | Parciální a směrové derivace

Směrové derivace

Zmíněný nedostatek parciálních derivací se pokusíme napravit zavedením derivace v libovolném směru.

Definice

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má *derivaci ve směru vektoru* $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Směrovou derivaci v bodě x často značíme rovněž $f_v(x)$.

9 29-16:00

$$d_{k\cdot v} f(x) = k \cdot d_v f(x)$$

$$d_{k\cdot v} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x + t\cdot k\cdot v) - f(x)\right) =$$
$$= \lim_{\underbrace{k\cdot t}_{s}\to 0} k \cdot \frac{1}{\underbrace{k\cdot t}_{s}}\left(f(x + \underbrace{t\cdot k}_{s}\cdot v) - f(x)\right)$$
$$\parallel$$
$$k\cdot d_v f(x) = k \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(x + t\cdot v) - f(x)\right)$$

9 29-16:05

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y^2}{x^8 + y^4} & \text{pro } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$\nexists$ limita: $y = kx^2$

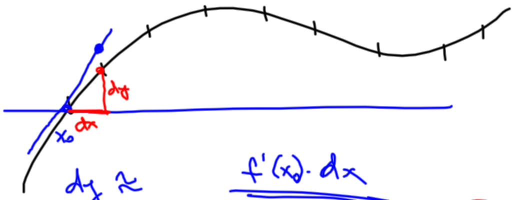
$$f(x, kx^2) = \frac{x^4 \cdot k^2 \cdot x^4}{x^8 + k^4 x^8} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x, kx^2) =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{k^2 x^8}{x^8(1+k^4)} = \frac{k^2}{1+k^4}$$ závisí na k!

$\Rightarrow \nexists$ limita v $(0,0)$

$v = (v_1, v_2)$

$$d_v f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(f(0 + t\cdot v_1, 0 + t\cdot v_2) - \underbrace{f(0,0)}_{0}\right) =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{\cancel{t^4} v_1^4 \cdot t^2 v_2^2}{t^8 v_1^4 + \cancel{t^4} v_2^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t \cdot v_1^4 \cdot v_2^2}{v_1^4 \cdot t^4 + v_2^2} = 0$$ (i pro $v_2 = 0$)

9 29-16:11



$dy \approx f'(x_0)\cdot dx$

$\frac{dy}{dx} \approx f'(x_0)$

$dx \mapsto f'(x_0)\cdot dx$

$h \mapsto f'(x_0)\cdot h$

ve 2 prom: $(h,k) \mapsto (a_1, a_2)\cdot\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = a_1 h + a_2 k$

9 29-16:20