Příklad

Nalezněte extrémy funkce $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$ na množině M, která je ohraničena trojúhelníkem, tvořeným souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.

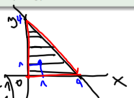
stac. body:

$0 = f'_x(x,y) = y - 2x + 1$

$0 = f'_y(x,y) = x - 2y + 1$

Cramerovo pravidlo:

$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$



$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ $\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$

stac. $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1$

$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 1$

$f(1,1) = 1$. Body na hranici:

I. $x = 0$ $f(0,y) = -y^2 + y$, $y \in \langle 0,4 \rangle$, max. v $y_0 = \frac{1}{2}$ $f(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

min. v $y = 0$ $f(0,0) = 0$

nebo $y = 4$ $f(0,4) = -12$

II. $y = 0$ symetricky $f(4,0) = -12$, $f(0,0) = 0$, $f(\frac{1}{2},0) = \frac{1}{4}$

III. $x + y = 4$ hraniční body $[4,0]$, $[0,4]$, stac. ...

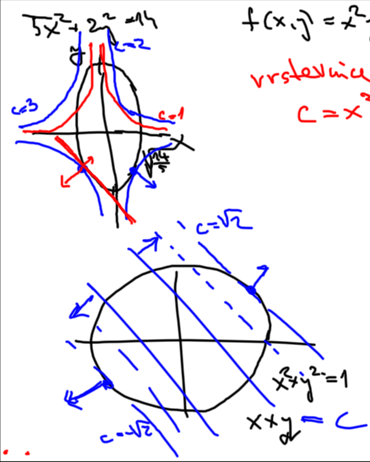
Abs. max. v $[1,1]$, abs. min. $[0,4]$, $[4,0]$

10 20-15:10

$5x^2 + 2y^2 = 14$ $f(x,y) = x^2 y$

vrstevnice funkce na úrovni c:

$c = x^2 y \Leftrightarrow y = \frac{c}{x^2}$



10 20-15:23

Výklad o vázaných extrémech jsme začali tím, že pro nalezení absolutních extrémů funkce na kompaktní množině často potřebujeme vyšetření extrémů na množině bodů vázaných nějakou podmínkou.

Ilustrujme si to na příkladu:

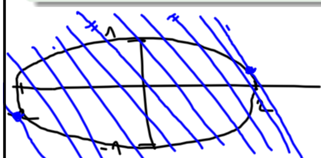
Příklad

Maximalizujte $f(x,y) = 2x + y$ za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.

10 20-15:36

Příklad

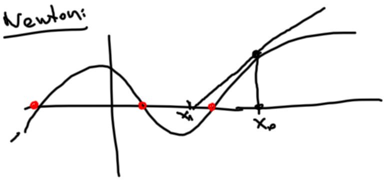
Maximalizujte $f(x,y) = 2x + y$ za podmínky $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.



$2x + y = c \Leftrightarrow y = c - 2x$

10 20-15:36

Newton:



tečna ke grafu fce f v $[x_n, f(x_n)]$:

$y - f(x_n) = f'(x_n) \cdot (x - x_n)$

průs. s osou x: $[x_{n+1}, 0]$ $0 - f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$\sqrt{d}$: $x^2 - d = 0$, $f(x) = x^2 - d$ $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - d}{2x_n} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n} = \boxed{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{d}{x_n}\right)}$

10 20-15:54

Př: $\sqrt{20} \doteq 4{,}4721$

$x_1 = 4$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(4 + \frac{20}{4}\right) = 4{,}5$

$x_3 = \frac{1}{2}\left(4{,}5 + \frac{20}{4{,}5}\right) = 4{,}472$

Př: $x^{\frac{1}{3}} = f(x)$ $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

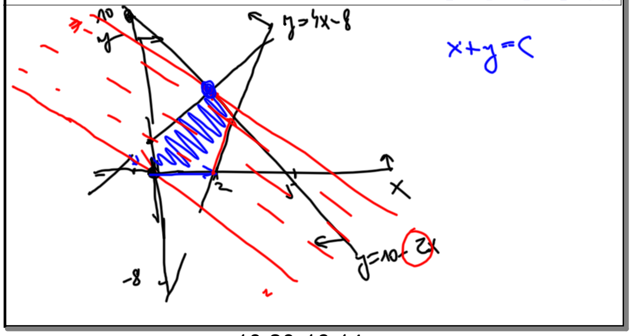
$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3} x_n^{-\frac{2}{3}}} = x_n - 3x_n = \underline{\underline{-2x_n}}$

10 20-15:57

Příklad

Maximalizujte hodnotu $x+y$ za podmínek

$$4x - y \leq 8$$
$$2x + y \leq 10$$
$$5x - 2y \geq -2$$
$$x, y \geq 0$$



10 20-16:14

$[\cos t, \sin t]$ $\quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle$

kružnice - délka:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t)'^2 + (\sin t)'^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$\boxed{\int \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad \varphi'(t) \quad \psi'(t)}$$

$x = \varphi(t)$

$y = \psi(t)$

$\sqrt{1+f'(x)}\,dx$

$$\int \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

10 20-16:20