f) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

g) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}(1+\frac{1}{x})^{\frac{x^2}{x+y}}$.

ad f) $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}(x^2+y^2)e^{-(x+y)} =$

pol. souřadnice
$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$r\to\infty$, $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$

$= \lim_{\substack{r\to\infty\\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})}} r^2\cdot e^{-(r\cos\varphi+r\sin\varphi)} = \lim_{\substack{r\to\infty\\ \varphi}} r^2 e^{-r(\cos\varphi+\sin\varphi)}$

Omezení pro $1\le\cos\varphi+\sin\varphi = \sqrt{2}\cdot\cos(\varphi-\frac{\pi}{4}) \le \sqrt{2}$

$\cos\varphi\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin\varphi\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \cos(\varphi-\frac{\pi}{4})$

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

9 30-16:51

$\lim_{r\to\infty} r^2 e^{-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} = \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{e^{r\overbrace{(\cos\varphi+\sin\varphi)}^{\ge 1}}} \le$

$\le \lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{e^r} \overset{l'H}{=} \lim_{r\to\infty}\frac{2r}{e^r} \overset{l'H}{=} \lim_{r\to\infty}\frac{2}{e^r} =$

$= 0.$

odůvod alternativně: max a min $f(\varphi)=\cos\varphi+\sin\varphi$ na $(0,\frac{\pi}{2})$

$f'(\varphi) = -\sin\varphi+\cos\varphi = 0 \Leftrightarrow \cos\varphi=\sin\varphi \Leftrightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}$

$f(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$ max, $f(0)=1$ min, $f(\frac{\pi}{2})=1$ min.

$0 \le r^2 e^{-r(\cos\varphi+\sin\varphi)} \le r^2 e^{-r}$

9 30-17:12

g) $\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right)^{\frac{x}{x+y}} =$

$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$

$= e^{\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{x}{x+y}}$

$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{x}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)}\frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow \lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} = e^1 = e$

9 30-17:20

Příklad 9. *Dokažte, že následující limity neexistují:*

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$,

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$.

ad a) svazek přímek proch. $(0,0)$: $y=k\cdot x$, $k\in\mathbb{R}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to0}\frac{k\cdot x^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2}$

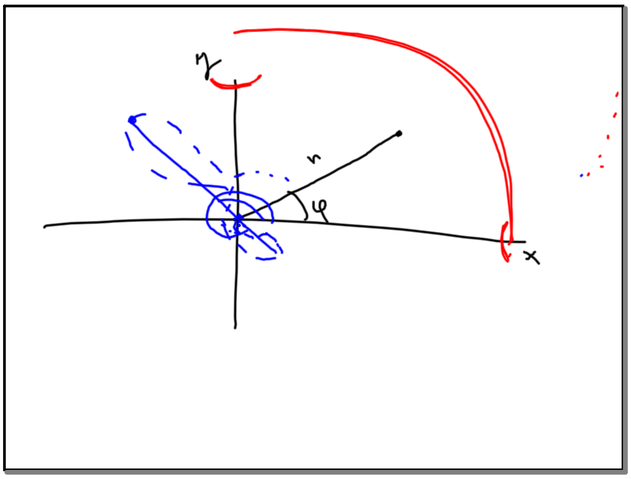
– limita neexistuje, neboť závisí na k.

jinak:

$= \lim_{\substack{r\to0\\ \varphi\in\langle0,2\pi)}}\frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\underbrace{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}_{=1})} = \cos\varphi\sin\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$

– závisí na φ ⇒ limita neexistuje

9 30-16:52



9 30-17:33

ad b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy} = \lim_{\substack{r\to0\\ \varphi\in\langle0,2\pi)}}\frac{1-\cos r^2}{r^2\cdot r^2\cos\varphi\sin\varphi} =$

$= \lim_{r\to0}\frac{1-\cos r^2}{r^4}\cdot\underbrace{\cancel{\lim_{r\to0}}\frac{2}{\sin 2\varphi}}_{\text{závisí na }\varphi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sin 2\varphi} = \frac{1}{\sin 2\varphi}$ NEEXIST.

$\lim_{r\to0}\frac{1-\cos r^2}{r^4} \overset{l'H}{=} \lim_{r\to0}\frac{\sin r^2\cdot 2r}{4r^3} = \lim_{r\to0}\frac{\sin r^2}{2r^2} \overset{l'H}{=} (*)$

$= \lim_{r\to0}\frac{\cos r^2\cdot 2r}{4r} = \lim_{r\to0}\frac{\cos r^2}{2} = \frac{1}{2}$

(*) $\lim_{r\to0}\frac{\sin r^2}{2r^2} = \frac{1}{2}\lim\frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2}$, $\boxed{t=r^2}$

9 30-17:32

Příklad 10. *Vypočtěte všechny parciální derivace (i smíšené) funkce*

$$f(x,y) = x^4 + 10x^2y^3 - 2y^6$$

až do řádu 3 včetně.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 + 20xy^3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 30x^2y^2 - 12y^5$

$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = 12x^2 + 20y^3$, $f''_{xy}(x,y) = 60xy^2$

$f''_{yx}(x,y) = 60xy^2 = f''_{xy}(x,y)$, $f''_{yy}(x,y) = 60x^2y - 60y^4$

$f'''_{xxx}(x,y) = 24x$, $f'''_{xxy}(x,y) = 60y^2$, $f'''_{xyy}(x,y) = 120xy$

$f'''_{yyy}(x,y) = 60x^2 - 240y^3$

9 30-16:52

Příklad 11. *Určete směrovou derivaci funkce* $f(x,y) = \operatorname{arctg}(x^2+y^2)$ *v bodě* $[-1,1]$ *ve směru vektoru* $(1,2)$.

x_0 y_0 v_1 v_2

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\cdot\left(\operatorname{arctg}\left((-1+t)^2+(1+2t)^2\right) - \operatorname{arctg}\left((-1)^2+1^2\right)\right) \overset{l'H}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\operatorname{arctg}(5t^2+2t+2) - \operatorname{arctg} 2\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{1+(\ldots+2)^2}\cdot(10t+2)}{1} = \frac{1}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5}$$

9 30-16:52

Příklad 12. *Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí*

a) $f(x,y) = x^{xy}$, pro $x>0$ $\quad e^{xy\ln x}$

b) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy}$.

ad a) $f'_x(x,y) = e^{xy\ln x}\cdot[xy\ln x]' =$

$= x^{xy}\cdot y\cdot(\ln x + 1)$

$f'_y(x,y) = x^{xy}\cdot[xy\cdot\ln x]' = x^{xy}\cdot x\cdot\ln x$

ad b) $f'_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{\cancel{1+xy}}\right)^2}\cdot\frac{1\cdot(1+xy)-(x-y)y}{\cancel{(1+xy)^2}} =$

$= \frac{1+y^2}{(1+xy)^2+(x-y)^2} = \frac{1+y^2}{1+\cancel{2xy}+x^2y^2+x^2-\cancel{2xy}+y^2} =$

$= \frac{1+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+x^2}$

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$

$f(y,x) = -f(x,y)$

$x \leftarrow y$

$f'_y(x,y) = f'_x(y,x) = - \quad = -\frac{1}{1+y^2}$

9 30-16:53

Příklad 13. *Určete diferenciál v daném bodě:*

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ *v bodě* $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *v bodě* $[1,\sqrt{3}]$.

diferenciál je funkce: $\quad a,b \in \mathbb{R}$

$(dx,dy) \longmapsto a\cdot dx + b\cdot dy$

$(h,k) \longmapsto a\cdot h + b\cdot k$

⇐ spojitost

∃ diferenciál v bodě $[x^*,y^*]$

⇓

∃ všechny směrové derivace v $[x^*,y^*]$

⇓

∃ všechny parciální derivace v $[x^*,y^*]$

spojité parc. derivace

9 30-16:53

Příklad 13. *Určete diferenciál v daném bodě:*

a) $f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ *v bodě* $[1,1]$,

b) $f(x,y) = \arcsin\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *v bodě* $[1,\sqrt{3}]$.

diferenciál je funkce: $\quad a,b \in \mathbb{R}$

$(dx,dy) \longmapsto a\cdot dx + b\cdot dy$

$(h,k) \longmapsto a\cdot h + b\cdot k$

⇐ spojitost

∃ diferenciál v bodě $[x^*,y^*]$

⇓

∃ všechny směrové derivace v $[x^*,y^*]$

⇓

∃ všechny parciální derivace v $[x^*,y^*]$

spojité parc. derivace

9 30-18:18

$f(x,y) = xy + \frac{x}{y}$ v $[1,1]$

$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = y + \frac{1}{y} \overset{\text{spoj. v } [1,1]}{\Longrightarrow} \frac{\partial}{\partial x} f(1,1) = 2$

$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = x - \frac{x}{y^2} \overset{\text{spoj.}}{\Longrightarrow} \frac{\partial}{\partial y} f(1,1) = 0$

Tedy diferenciál:

$(dx,dy) \longmapsto 2\cdot dx + 0\cdot dy$

9 30-18:19

ex. diferenciál:

$df(x_0,y_0): (dx,dy) \longmapsto f'_x(x_0,y_0)\cdot dx + f'_y(x_0,y_0)\cdot dy$

$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy$

směrová derivace v $[x_0,y_0]$ ve směru $v=(v_1,v_2)$

$f'_x(x_0,y_0)\cdot v_1 + f'_y(x_0,y_0)\cdot v_2 =$

$= (f'_x, f'_y)\cdot v$

skal. součin vektorů

9 30-18:14

b) $f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v $[1,\sqrt{3}]$

$f'_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+y^2} =$

$= \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{\frac{y^2}{x^2+y^2}}\cdot(x^2+y^2)} = \frac{\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \left|\ \sqrt{y^2} = |y| = y \text{ pro } y>0\ \right| = \frac{y^2}{y(x^2+y^2)} = \frac{y}{x^2+y^2}$

$f'_x(1,\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

9 30-18:18

$f(x,y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ v $[1,\sqrt{3}]$

$f'_y(x,y) = \frac{1}{y\cdot\sqrt{\frac{1}{x^2+y^2}}} \cdot \frac{-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y}{x^2+y^2} =$

$= \frac{-\frac{x\cancel{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\cancel{y}\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2}$

$f'_y(1,\sqrt{3}) = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ diferenciál v $[1,\sqrt{3}]$

$(dx,dy) \longmapsto \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot dx - \frac{1}{4}\cdot dy$

9 30-18:28

Spočteme př. 11 snadněji: v $[-1,1]$ ve směru $(1,2)$

$f(x,y) = \mathrm{arctg}(x^2+y^2)$

$f'_x(x,y) = \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$ $\quad f'_x(-1,1) = -\frac{2}{5}$

$f'_y(x,y) = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$ $\quad f'_y(-1,1) = \frac{2}{5}$

diferenciál: $(dx,dy) \longmapsto -\frac{2}{5}\cdot dx + \frac{2}{5}\,dy$

$(1,2) \longmapsto -\frac{2}{5}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{2}{5}$

9 30-18:32