Příklad 21. *Určete stacionární body funkce* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y + y^2x - xy$ *a rozhodněte, které z těchto bodů jsou lokálními extrémy a jakého druhu.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \boxed{2xy + y^2 - y = 0}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \boxed{x^2 + 2yx - x = 0}$$

Odečteme: (*)

$$y^2 - y - x^2 + x = 0$$
$$y^2 - x^2 - (y - x) = 0$$
$$(y-x)[y+x-1] = 0$$

I. $y = x$

(*) $2x^2 + x^2 - x = 0$

$3x^2 - x = 0$

$x(3x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{1}{3}$ | $y_1 = 0$ $[0,0]$; $y_2 = \frac{1}{3}$ $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

II. $y + x - 1 = 0$

$y = 1 - x$

$$2x(1-x) + (1-x)^2 - (1-x) = 0$$
$$\cancel{2x} - 2x^2 + \cancel{1} - \cancel{2x} + x^2 - \cancel{1} + x = 0$$
$$-x^2 + x = 0$$
$$x(-x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 1 \quad y_1 = 1,\ y_2 = 0$$

$[0,1]$, $[1,0]$

10 14-17:02

Vypočteme Hessián

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x+2y-1 \\ 2x+2y-1 & 2x \end{pmatrix}$$

$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ indef.

$H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & +\frac{1}{3} \\ +\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ hl. minory $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ poz. def.

$H_f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ indef.

$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ indef.

Lok. minimum v bodě $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$

poz. (neg.) definitní

$\forall (u,v) \neq 0: (u,v)\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} > 0$ $(<) 0$

$$Tf(x,y) = f(x_0,y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x-x_0, y-y_0) + \frac{1}{2}(x-x_0, y-y_0)\, Hf \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

> 0

$\Rightarrow f(x,y) > f(x_0,y_0)$

10 14-17:02

Příklad 22. *Ukažte, že funkce* $F(x,y) = e^x \sin(y) + e^y \sin(x)$ *definuje předpisem* $F(x,y) = 1$ *pro* $[x,y] \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ *implicitně proměnnou y jako funkci proměnné x. Určete* $f'(x)$.

implicitně zadaná funkce?: $e^x \sin y + e^y \sin x = 1$ (*)

$y = y(x)$ $\quad f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$ $\quad F_y \neq 0$

derivujeme def. vztah (*) podle x:

$$e^x \cdot \sin y + e^x \cdot \cos y \cdot y' + e^y \cdot y' \cdot \sin x + e^y \cdot \cos x = 0$$
$$y'(e^x \cos y + e^y \cdot \sin x) = -e^x \sin y - e^y \cos x$$
$$y' = -\frac{e^x \sin y + e^y \cos x}{e^x \cos y + e^y \cdot \sin x}$$

chceme: $[x,y] \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle^2$

$\Downarrow$

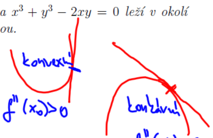
$e^x \cos y + e^y \sin x \neq 0$ ≥ 0

$\cos y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

10 14-17:03

Příklad 23. *Rozhodněte, zda křivka* $x^3 + y^3 - 2xy = 0$ *leží v okolí bodu* $[1,1]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*



$F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy = 0$

$y = y(x)$: $3x^2 + 3y^2 \cdot y' - 2y - 2xy' = 0$ (*)

(navíc): $y' = -\frac{3x^2 - 2y}{3y^2 - 2x}$ $\quad y'[1,1] = -1$

rovnice tečny: $y - y_0 = y'(x - x_0)$

$y - 1 = -1(x-1)$

$x + y - 2 = 0$

druhá derivace (derivujeme rovnost (*)):

$$6x + 6y \cdot y' \cdot y' + 3y^2 \cdot y'' - 2y' - 2y' - 2xy'' = 0$$

chci $y''(1,1)$; dosadíme $x = 1, y = 1, y' = -1$:

$$6 + 6 + 3y'' + 2 + 2 - 2y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = -16 < 0$$

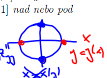
y(x) leží pod tečnou

10 14-17:03

(*) **Příklad 24.** *Rozhodněte, zda plocha daná v okolí* $[1,0,1] \in E_3$ *rovnicí* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - x - y - z = 0$ *leží v bodě* $[1,0,1]$ *nad nebo pod tečnou rovinou.*

$z = z(x,y)$

potřebujeme parc. derivace $z'_x, z'_y, z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$



$$3x^2 + 0 + 3z^2 \cdot z'_x - 3yz - 3yx \cdot z'_x - 1 - 0 - z'_x = 0$$
$$0 + 3y^2 + 3z^2 \cdot z'_y - 3xz - 3xy \cdot z'_y - 0 - 1 - z'_y = 0$$

dosadíme: $x = 1, y = 0, z = 1$: $\quad 3 + 3z'_x - 1 - z'_x = 0$

$3z'_y - 3 - 1 - z'_y = 0$

$z'_x = -1,\ z'_y = 2$

derivujeme podruhé:

$$6x + 6z \cdot (z'_x)^2 + 3z^2 \cdot z''_{xx} - 3yz'_x - 3y \cdot z'_x - 3yx \cdot z''_{xx} - z''_{xx} = 0$$
$$6z \cdot z'_y \cdot z'_x + 3z^2 z''_{xy} - 3z - 3y \cdot z'_y - 3x \cdot z'_x - 3yx \cdot z''_{xy} - z''_{xy} = 0$$
$$6y + 6z(z'_y)^2 + 3z^2 \cdot z''_{yy} - 3x \cdot z'_y - 3x \cdot z'_y - 3xy z''_{yy} - z''_{yy} = 0$$

dosadíme: $6 + 6 \cdot (-1)^2 + 3z''_{xx} - z''_{xx} = 0 \Rightarrow z''_{xx} = -6$

$6 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot z''_{xy} - 3 - 3 \cdot (-1) - z''_{xy} = 0$

$\Rightarrow z''_{xy} = 6$

$6 \cdot 2^2 + 3 \cdot z''_{yy} - 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - z''_{yy} = 0$

$\Rightarrow z''_{yy} = -6$

$H_z(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$ hlavní minory $-6, 0$

$z = z(x,y)$ $\quad = 6\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ neg. semidef. -ind.

$\Rightarrow$ nelze rozhodnout

10 14-17:03

rovnice tečné roviny:

$$z - z_0 = z'_x \cdot (x - x_0) + z'_y (y - y_0)$$
$$z - 1 = -1(x-1) + 2(y - 0)$$
$$x - 2y + z = 2$$

$$(u,v)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} u^2 + (a_{12} + a_{21}) uv + a_{22} \cdot v^2$$

$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \overset{?}{>} 0 \Rightarrow$ lok. ostrý extrém

10 14-18:16

Příklad 25. *Najděte lokální extrémy funkce $y = y(x)$ dané implicitně rovnicí* $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. $(*)$

derivujeme: $(y = y(x))$: $\dfrac{\cancel{2}x+\cancel{2}y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{\frac{y'x-y}{\cancel{x^2}}}{1+\frac{y^2}{\cancel{x^2}}}$

$\dfrac{x+y\cdot y'}{\cancel{x^2+y^2}} = \dfrac{y'x-y}{\cancel{x^2+y^2}}$ $\qquad x^2+y^2>0\ \forall [x,y]\in D$

$x+y\cdot y' = y'x-y \Leftrightarrow y'(x-y) = x+y$ $\qquad x\neq y$

$y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ $\qquad (x\neq 0)$

Položme $y'=0$: $\dfrac{x+y}{x-y}=0 \Leftrightarrow \underline{y=-x}$ a dosadím do $(*)$: $\ln\sqrt{2x^2} = \operatorname{arctg}(-1) \Leftrightarrow \ln(\sqrt{2}\cdot|x|) = -\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cdot|x| = e^{-\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

10 14-17:03

Druhá derivace:

$y'' = \dfrac{(1+y')(x-y)-(x+y)(1-y')}{(x-y)^2} = \Big|$ pro $y'=0\Big| = \dfrac{(x-y)-(x+y)}{(x-y)^2} = -\dfrac{2y}{(x-y)^2}$

$[x,y] = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\cdot[1,-1]$ ... lok. minimum

$[x,y] = \dfrac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}[-1,1]$ ... lok. maximum

10 14-18:29

Příklad 26. *Určete parametrickou rovnici tečny v bodě* $[x_0,y_0,z_0]$, $z_0>0$ *ke křivce, jež vznikla jako průsečík kulové plochy* $K: x^2+y^2+z^2=4$ *s válcovou plochou* $V: x^2+y^2-2x=0$ *(tzv.* Vivianiho křivka*).*

tečna = průnik tečných rovin

tečný vektor je kolmý na normálové vektory obou rovin

normálový vektor K v $[x_0,y_0,z_0]$: $(2x_0, 2y_0, 2z_0)$

k V — " — : $(2x_0-2, 2y_0, 0)$

vektorový součin: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x_0 & 2y_0 & 2z_0 \\ 2x_0-2 & 2y_0 & 0 \end{vmatrix} = -4y_0z_0\cdot i + j(2z_0\cdot(2x_0-2)) + k(4x_0y_0 - 4x_0y_0 + 4y_0)$

tečný vektor $4(-y_0z_0, x_0z_0-z_0, y_0)$

rce tečny: $[x_0,y_0,z_0] + t\cdot(-y_0z_0, z_0(x_0-1), y_0)$

10 14-17:03

10 14-18:22