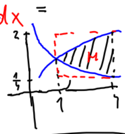
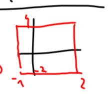
Příklad 34. *Vypočtěte* $\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, kde* M *je oblast* $1 \le x \le 4, \frac{1}{x} \le y \le \sqrt{x}$.

$$\underset{\text{dvojný}}{\iint_M xy\, dM} = \underset{\text{dvojnásobný}}{\int_1^4 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} xy\, dy\right) dx} =$$



$$= \int_1^4 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{x}{2}\left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$\langle -1,2\rangle \times \langle -2,4\rangle$



$$= \frac{1}{2}\int_1^4 x^2 - \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right]_1^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 2\ln 2 - \frac{1}{3} + 0\right) = \underline{\underline{\frac{21}{2} - \ln 2}}$$

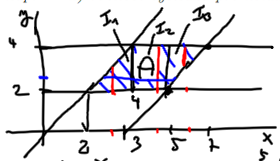
Lze počítat i jako: $\frac{1}{4} \le y \le 1 \Rightarrow \frac{1}{y} \le x \le 4$

$1 \le y \le 2 \Rightarrow y^2 \le x \le 4$

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \int_{1/y}^4 xy\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{y^2}^4 xy\, dx\, dy$$

11 4-16:52

Příklad 35. *Převeďte dvojný integrál* $\iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}A$ *na dvojnásobný (obě možnosti pořadí integrace) pro množinu A ohraničenou přímkami* $y = x, y = x - 3, y = 2, y = 4$*. Ověřte (přímo nebo s využitím SW např. MAW) rovnost výsledku pro konkrétní funkci* $f(x,y) = y$.



$I = I_1 + I_2 + I_3$

$I_1: 2 \le x \le 4 \quad 2 \le y \le x$

$I_2: 4 \le x \le 5 \quad 2 \le y \le 4$

$I_3: 5 \le x \le 7 \quad x-3 \le y \le 4$

$$I = \int_2^4 \int_2^x f(x,y)\,dy\,dx + \int_4^5 \int_2^4 f(x,y)\,dy\,dx + \int_5^7 \int_{x-3}^4 f(x,y)\,dy\,dx$$

obráceně: $2 \le y \le 4 \quad y \le x \le y+3$

$$I = \int_2^4 \int_y^{y+3} f(x,y)\,dx\,dy$$

11 4-16:52

Dvojný integrál
http://user.mendelu.cz/marik/maw

Integrujeme funkci y na množině zadané nerovnostmi $2 \le y \le 4$ a $y \le x \le y+3$.

$I = \int_2^4 \int_y^{y+3} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$= \int_2^4 [x\,y]_y^{y+3}\,\mathrm{d}y$ *(vnitřní integrace)*

$= \int_2^4 (y+3)\,y - y\,y\,\mathrm{d}y$ *(dosazení mezí)*

$= \int_2^4 3\,y\,\mathrm{d}y$ *(úprava)*

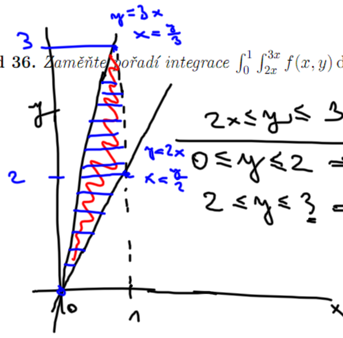
$= \left[\frac{3\,y^2}{2}\right]_2^4$ *(vnitřní integrace)*

$= \frac{3}{2}4^2 - \frac{3}{2}2^2$ *(dosazení mezí)*

$= 18$ *(úprava)*

11 4-17:30

Příklad 36. *Zaměňte pořadí integrace* $\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.



$2x \le y \le 3x \qquad 0 \le x \le 1$

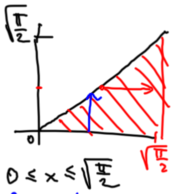
$0 \le y \le 2 \Rightarrow \frac{y}{3} \le x \le \frac{y}{2}$

$2 \le y \le 3 \Rightarrow \frac{y}{3} \le x \le 1$

11 4-16:52

Příklad 37. *Vypočtěte integrál*

$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



$$\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2)\,dx\,dy =$$

$0 \le x \le \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$0 \le y \le x$

$$= \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_0^x y^2 \sin(x^2)\,dy\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2)\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \sin(x^2)\cdot x^3\,dx =$$

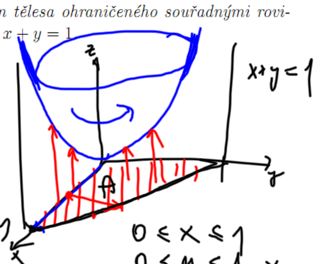
$$= \left|\begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2x\,dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cdot\frac{1}{2}t\,dt =$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cdot\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} \text{per partes} & \\ u = t & u' = 1 \\ v' = \sin t & v = -\cos t \\ \int uv' = uv - \int u'v & \end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\left[-t\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt\right) = \frac{1}{6}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

11 4-16:52

Příklad 38. *Vypočtěte objem tělesa ohraničeného souřadnými rovinami a plochami* $z = x^2 + y^2, x + y = 1$



$$\iiint_A dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x^2+y^2} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 + y^2\,dy\,dx =$$

$0 \le x \le 1$

$0 \le y \le 1-x$

$0 \le z \le x^2 + y^2$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 x^2(1-x) + \frac{1}{3}(1-x)^3\,dx =$$

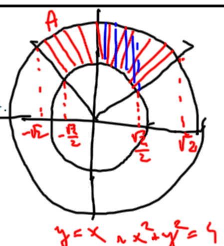
$$= \left[x^3/3 - x^4/4 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{3x^2}{2} + x^3 - \frac{x^4}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

11 4-16:53

Příklad 39. *Vypočtěte integrál*

$$\iint_A 2(x^2+y^2)\,\mathrm{d}A,$$

kde $A = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge |x|\}$.



$0 \le x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \le x \le \sqrt{2}$, $x \le y \le \sqrt{4-x^2}$

$y = x \wedge x^2+y^2 = 4$

Ukážeme si, jak to udělat jednodušše

Transformace do polárních souřadnic!

11 4-16:53

$x = r\cdot\cos\varphi$ $\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$

F: $y = r\sin\varphi$ $\quad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

$1 \le r \le 2$

$\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{3\pi}{4}$

$DF = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$, $\det D^1F = r$

„$dx\,dy$" $= r\,dr\,d\varphi$

$$\iint_A 2(x^2+y^2)\,dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\int_1^2 2r^2 r\cdot dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{2r^4}{4}\right]_1^2 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(8 - \frac{1}{2}\right) d\varphi = \frac{15\pi}{4}$$

$1 \le x^2+y^2 \le 4$ $\quad x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\quad x^2+y^2 = r^2$

$y \ge |x|$ $\quad 1 \le r^2 \le 4$, $1 \le r \le 2$

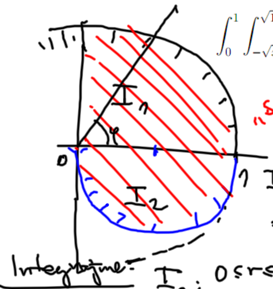
$r\sin\varphi \ge \cancel{r}|\cos\varphi|$

$\boxed{\sin\varphi \ge |\cos\varphi|}$

11 4-18:10

Příklad 40. *Spočtěte integrál*

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$



$y^2+x^2 \le 1$

$y \ge -\sqrt{x-x^2}$

„selsky": $y \ge 0 \vee (y \le 0 \wedge y \ge -\sqrt{x-x^2})$

$I_1 = \frac{\pi}{4}$

$I_2 = \frac{1}{2}\pi\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}$

$y^2 \le x - x^2$

$x^2+y^2 \le x$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \le \frac{1}{4}$

$\left[\frac{1}{2}, 0\right]$ $r = \frac{1}{2}$

Integrujme: (pol. souřadnice)

I_1: $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

I_2: $\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi$

$y^2 \le x - x^2$; $r^2\sin^2\varphi \le r\cos\varphi - r^2\cos^2\varphi \Leftrightarrow$ $r^2 \le r\cos\varphi$, $r \le \cos\varphi$

11 4-16:53

I_2: $\frac{3\pi}{2} \le \varphi \le 2\pi \Rightarrow 0 \le r \le \cos\varphi$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$I_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\int_0^{\cos\varphi} r\,dr\,d\varphi = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{8}\left[\sin 2\varphi\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{\pi}{8}$$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$2\cos^2 x - 1 = \cos(2x)$

$\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$

$I = I_1 + I_2 = \frac{3\pi}{8}$

11 4-18:30

I_2 lze snadněji spočítat pomocí transformace

$y = r\sin\varphi$

$x = r\cos\varphi + r$

$\pi \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le r \le \frac{1}{2}$

Jacobián: $\begin{vmatrix} \cos\varphi + 1 & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos\varphi + r$

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi}\int_0^{\frac{1}{2}} (r\cos\varphi + r)\,dr\,d\varphi = \dots = \frac{\pi}{8}$$

11 4-18:38

Příklad 41. *Pomocí vhodné transformace souřadnic vypočtěte integrál* $\iint_A \sqrt{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde množina* A *je ohraničena křivkami*

$$y^2 = 2x,\ y^2 = x,\ xy = 1,\ xy = 2.$$

11 4-16:53

Příklad 42. *Vypočtěte*

1. *těžiště,*
2. *momenty setrvačnosti vzhledem k souřadným osám*

tenké homogenní rovinné lichoběžníkové desky s vrcholy v bodech $[-1,0]$, $[2,0]$, $[2,2$
a $[-1,1]$.

11 4-16:53

Příklad 43. *Hodnotu integrálu*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

odhadněte pomocí

(a) obdélníkového pravidla,

(b) lichoběžníkového pravidla

(c) Simpsonova pravidla,

přičemž zadaný interval rozdělte na 3 intervaly téže délky. Dosažené výsledky porovnejte s přesnou hodnotou a pomocí obrázku zdůvodněte míru nepřesnosti jednotlivých pravidel.

11 4-16:53

11 4-16:51